MODUL LOGIKA MATEMATIKA

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #1
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat mengetahui dasar2x dari logika matematika (himpunan, kalimat deklaratif, penghubung kalimat, tabel kebenaran, logika proposisi, logika predikat) dan penerapannya di ilmu komputer.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep dasar logika 1.2. Penggunaan logika
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. Logika Matematika

Dalam kehidupan sehari-hari, kita menggunakan pikiran untuk memecahkan berbagai masalah yang ada. Sering kali kita menemukan suatu gagasan baru dari informasi dan gagasan yang telah ada. Proses ini dikenal sebagai bernalar. Dalam bernalar kita memiliki argumen untuk sampai pada suatu kesimpulan. Kaidah-kaidah dalam logika akan mempermudah kita untuk menilai apakah proses pengambilan kesimpulan ini adalah sah (valid) atau tidak.

Pada bab ini dibahas beberapa terminologi dan operasi dasar yang akan digunakan dalam logika matematika serta beberapa cara pengambilan kesimpulan yang sah. Hal ini berkaitan dengan perumusan jalan pikiran, dimaksudkan untuk mempermudah seseorang mempelajari liku-liku pikiran yang terdapat dalam matematika.

Ilmu Logika berhubungan dengan kalimat-kalimat (argumen-argumen) dan hubungan yang ada di antara kalimat-kalimat tersebut. Tujuannya adalah memberikan aturan-aturan sehingga orang dapat menentukan apakah suatu kalimat bernilai benar. Kalimat yang dipelajari dalam logika bersifat umum, baik bahasa sehari-hari maupun bukti matematika yang didasarkan atas hipotesa-hipotesa. Oleh karena itu, aturan-aturan yang berlaku di dalamnya haruslah bersifat umum dan tidak tergantung pada kalimat atau disiplin ilmu tertentu. Ilmu logika lebih mengarah pada bentuk kalimat (sintaks) daripada arti kalimat itu sendiri (semantik).

1.1 Konsep Dasar Logika

1) Logika (*logic*) yang berasal dari kata bahasa Yunani 'logos' adalah ilmu pengetahuan yang mempelajari atau berkaitan dengan prinsip-prinsip dari penalaran argumen/pernyataan yang benar dan tepat (valid).
2) Logika merupakan ilmu yang mempelajari aturan - aturan matematika, sains, hukum, dan bidang lainnya. Logika berhubungan dengan Pernyataan. Oleh karena itu, dalam logika hanya terdapat dua kemungkinan kebenarannya, yaitu benar atau salah.
3) Dalam pengoperasian komputer hanya dikenal dua kondisi analog dengan logika yaitu ada atau tidak adanya Aliran Listrik. Kondisi ini dapat diartikan dalam bahasa logika sebagai kondisi "True" atau "False".

4) Secara umum logika dibedakan menjadi dua yaitu Logika Pasti dan Logika Tidak Pasti. Logika pasti meliputi Logika Pernyataan (Propotitional Logic), Logika Predikat (Predicate Logic), Logika Hubungan (Relation Logic) dan Logika Himpunan. Sedangkan logika tidak pasti meliputi Logika Samar atau kabur (Fuzzy Logic).
   - Logika Pernyataan membicarakan tentang pernyataan tunggal dan kata hubungnya sehingga didapat kalimat majemuk yang berupa kalimat deklaratif.
   - Logika Predikat menelaah variabel dalam suatu kalimat, kuantifikasi dan validitas sebuah argumen.
   - Logika Hubungan mempelajari hubungan antara pernyataan, relasi simetri, refleksif, antisimtris, dll.
   - Logika himpunan membicarakan tentang unsur-unsur himpunan dan hukum-hukum yang berlaku di dalamnya.
   - Logika Samar merupakan pertengahan dari dua nilai biner yaitu ya-tidak, nol-satu, benar-salah. Kondisi yang ditunjukkan oleh logika samar ini antara lain: banyak, sedikit, sekitar x, sering, umumnya. Logika samar banyak diterapkan dalam kecerdasan buatan, mesin pintar atau sistem cerdas dan alat-alat elektronika. Program komputer dengan menggunakan logika samar mempunyai kapasitas penyimpanan lebih kecil dan lebih cepat bila dibanding dengan logika biner.

1.2 Kalimat Deklaratif (Proposisi)

Kalimat Deklaratif (proposisi) adalah suatu kalimat pernyataan yg bernilai benar saja atau salah saja tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Biasanya disimbolkan dengan huruf p, q, r, dan seterusnya. Nilai kebenaran masing-masing dinyatakan dengan "True (T)" jika benar dan "False (F)" jika salah.

Contoh 1.1

Berikut ini adalah beberapa contoh Proposisi:

a. 2 + 2 = 4

b. 4 adalah bilangan prima

c. Jakarta adalah ibukota negara Indonesia

d. Penduduk Indonesia berjumlah 50 juta.

Kalimat-kalimat di atas adalah kalimat deklaratif karena dapat diketahui benar/salahnya. Kalimat (a) dan (c) bernilai benar, sedangkan kalimat (b) dan (d) bernilai salah.

Contoh 1.2

Berikut ini adalah beberapa contoh kalimat yang **bukan** merupakan proposisi:

a. Dimanakan letak pulau Bali?

b. Siapakah namamu?

c. Simon lebih tinggi dari Lina

d. $x + y = 2$

e. 2 mencintai 3

Kalimat (a) dan (b) jelas bukan proposisi karena merupakan kalimat tanya sehingga tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Kalimat (c) juga bukan proposisi karena ada banyak orang di dunia ini yang bernama Simon dan Lina. Kalimat tersebut tidak menunjuk kepada Simon dan Lina yang spesifik sehingga tidak diketahui apakah benar bahwa Simon lebih tinggi dari Lina. Kalimat ini tergantung dari konteksnya (semesta pembicaraan). Kalau konteksnya adalah mahasiswa-mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit di Universitas X dan di antara mahasiswa-mahasiswa tersebut hanya ada 1 orang yang bernama Simon dan Lina, maka kalimat (c) merupakan suatu proposisi.

Dalam Kalimat (d), nilai kebenaran kalimat tergantung pada harga x dan y yang ada. Jika $x=1$ dan $y=1$, maka kalimat tersebut menjadi kalimat yang bernilai benar. Tetapi jika $x=2$ dan $y=3$, maka kalimat tersebut menjadi kalimat yang salah. Jadi, secara umum tidak dapat ditentukan apakah kalimat tersebut benar ataukah salah.

Kalimat (e), walaupun mempunyai susunan kalimat yang benar, tetapi tidak mempunyai arti karena relasi mencintai tidak berlaku pada bilangan. Oleh karena itu, kalimat tersebut tidak dapat ditentukan benar/salahnya.

1.2.1 Jenis-jenis pernyataan

a. Pernyataan sederhana

Pernyataan sederhana adalah pernyataan yang hanya menyatakan pikiran tunggal dan tidak mengandung kata hubung kalimat.

Contoh :

1. Rambut saya berwarna hitam.
2. Ibukota negara Indonesia adalah Jakarta.
3. Matahari terbit pada malam hari.

b. Pernyataan Majemuk

Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang terdiri dari pernyataan sederhana (satu atau lebih) dengan bermacam-macam kata hubung kalimat (*connective*).

Contoh 1.3

1. Saya menyukai warna merah **dan** hari ini cerah.
2. Adi suka kopi **atau** lina suka roti.

1.3 Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai-nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi-proposisi yang sederhana.

Dalam Logika Matematika tabel kebenaran adalah tabel dalam yang digunakan untuk melihat nilai kebenaran dari suatu premis/pernyataan.

Pada tabel kebenaran hanya menggunakan konstanta proposisional T untuk *True* dan F untuk *False*, bukan B atau S.

Pada masing-masing kasus, tabel kebenaran disusun berdasarkan sub-sub bagian. Jika bentuk simbol logika terdiri dari n variabel, maka tabel kebenaran terdiri dari 2^n baris.

Dibawah ini adalah tabel kebenaran untuk semua logikal operasi binary.

P	*Q*		0	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10	11	12	13	14	15
T	**T**		F	F	F	F	F	F	F	F		T	T	T	T	T	T	T	T
T	**F**		F	F	F	F	T	T	T	T		F	F	F	F	T	T	T	T
F	**T**		F	F	T	T	F	F	T	T		F	F	T	T	F	F	T	T
F	**F**		F	T	F	T	F	T	F	T		F	T	F	T	F	T	F	T

Pada tabel kebenaran terdapat perangkai logika atau operator (ditunjukkan pada tabel dibawah ini).

Perangkai	**Simbol**
Dan	$\wedge$
Atau	$\vee$
Tidak/bukan	$\neg$
Jika...maka...	$\rightarrow$
Jika dan hanya jika	$\leftrightarrow$

1.4 Penghubung Kalimat

Sering kali, beberapa kalimat perlu digabungkan menjadi satu kalimat yang lebih panjang. Misalnya kalimat : "4 adalah bilangan genap dan 3 adalah bilangan ganjil" merupakan gabungan dari 2 buah kalimat : "4 adalah bilangan genap" dan kalimat "3 adalah bilangan ganjil". Dalam logika dikenal 5 buah penghubung:

Simbol	Arti	Bentuk
$\neg$	Tidak / Not / Negasi	Tidak...
$\wedge$	Dan / And / Konjungsi	... dan ...
$\vee$	Atau / Or / Disjungsi	... atau ...
$\rightarrow$	Implikasi	Jika...maka...
$\leftrightarrow$	Bi-implikasi	... jika dan hanya jika...

Dalam matematika digunakan huruf-huruf kecil seperti p, q, r, ... untuk menyatakan sub kalimat dan simbol-simbol penghubung untuk menyatakan penghubung kalimat.

Rangkuman

1. Logika merupakan ilmu yang mempelajari aturan - aturan matematika, sains, hukum, dan bidang lainnya. Logika berhubungan dengan Pernyataan. Oleh karena itu, dalam logika hanya terdapat dua kemungkinan kebenarannya, yaitu benar atau salah.
2. Kalimat Deklaratif (proposisi) adalah suatu kalimat pernyataan yg bernilai benar saja atau salah saja tetapi tidak sekaligus benar dan salah.
3. Dalam Logika Matematika tabel kebenaran adalah tabel dalam yang digunakan untuk melihat nilai kebenaran dari suatu premis/pernyataan.
4. Kata hubung kalimat pada logika terdiri dari 5 yaitu negasi (tidak), Konjungsi (dan), Disjungsi (atau), Implikasi dan Biimplikasi.

Latihan

Manakah dari pernyataan-pernyataan berikut yang merupakan proposisi?

(a) Apakah ini jawabanmu sudah benar, Bowo?

(b) Santi pergi kuliah.

(c) 10 adalah angka pecahan

(d) Jawablah pertanyaan ini!

(e) Bandung adalah ibukota Jawa Timur.

(f) Jam berapakah ini?

(g) Musim kemarau di Indonesia adalah panas dan kering.

(h) Badu kaya raya dan memiliki banyak harta.

(i) $7 + x = 10$

(j) Angka 8 adalah anggota bilangan genap.

(k) Yogyakarta adalah kota pelajar.

(l) 2. $2+2=4$

(m) Semua manusia adalah fana.

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL LOGIKA MATEMATIKA

KATA HUBUNG KALIMAT

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #2
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami konsep dasar pembentukan dan penentuan variabel dan model pembuatan tabel kebenaran.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep dasar pembentukan variabel 1.2. Penggunaan penghubung negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi 1.3. Pembentukan tabel kebenaran
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. Konsep Dasar Pembentukan Variabel

Dalam logika dikenal 5 buah penghubung, ditunjukkan pada tabel berikut.

Perangkai	Simbol
Dan (Konjungsi)	$\wedge$
Atau (Disjungsi)	$\vee$
Tidak/bukan (Negasi)	$\neg$
Implikasi (Jika...maka...)	$\rightarrow$
Biimplikasi (...jika dan hanya jika...)	$\leftrightarrow$

1.1 Negasi [¬]

Negasi suatu kalimat akan mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan dengan nilai kebenaran kalimat aslinya. Jadi, jika p bernilai benar maka ¬p bernilai salah. Sebaliknya, jika p bernilai salah, maka ¬p akan bernilai benar. Penulisan negasi dapat juga berupa ~A, Ā, -A atau ¬A. Negasi pada pernyataan biasanya menggunakan kata 'tidak', 'bukan', 'tidak benar'. Di bawah ini adalah tabel kebenaran negasi.

p	-p
T	F
F	T

Contoh 1.1

Apa bentuk kebalikan (negasi) dari proposisi berikut?

a. Hari ini adalah hari sabtu.
b. Tidak ada musim hujan di Indonesia.
c. Jakarta ibukota RI.
d. Zainal memakai kacamata.
e. Gunung Merapi terletak di 2 Propinsi dan 3 Kabupaten.

Penyelesaian:

a. Hari ini bukan hari sabtu.
b. Ada musim hujan di Indonesia.
c. Jakarta bukan ibukota RI.
d. Zainal tidak memakai kacamata.
e. Gunung Merapi bukan terletak di 2 Propinsi dan 3 Kabupaten.

1.2 Konjungsi [$\wedge$]

Misalkan p dan q adalah 2 buah proposisi. Proposisi "p dan q", yang disimbolkan dengan p $\wedge$ q, adalah proposisi yang bernilai benar, hanya jika p dan q keduanya bernilai benar, yang lainnya bernilai salah. Definisi di atas lebih mudah dipahami dengan menggunakan tabel kebenaran berikut ini.

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Contoh 1.2

p: Fahmi makan nasi.

q: Fahmi minum kopi.

Maka p $\wedge$ q : Fahmi makan nasi dan minum kopi.

Contoh 1.3

p: Hari ini panas.

q: Hari ini cerah

Nyatakan kalimat dibawa ini dengan simbol logika:

a. Hari ini tidak panas tetapi cerah.
b. Hari ini tidak panas dan tidak cerah.
c. Tidak benar bahwa hari ini panas dan cerah.

Penyelesaian:

a. Kata-kata "tetapi" mempunyai arti yang sama dengan "dan", sehingga kalimat (a) bisa dinyatakan sebagai : $\mathbf{\neg p \wedge q}$
b. $\mathbf{\neg p \wedge q}$
c. Kalimat "hari ini panas dan cerah" dapat dinyatakan sebagai $p \wedge q$, sehingga kalimat (c) bisa dinyatakan sebagai $\mathbf{\neg(p \wedge q)}$

1.3 Disjungsi [v]

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi "p atau q", yang disimbolkan dengan $p \vee q$, adalah proposisi yang bernilai salah, jika nilai p dan q keduanya bernilai salah, maka lainnya pasti bernilai benar. Di bawah ini adalah tabel kebenaran dari Disjungsi.

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Contoh 1.4

p : 5 adalah bilangan prima.

q : 5 adalah bilangan ganjil.

Maka $p \vee q$: 5 adalah bilangan prima atau ganjil.

Benar bahwa 5 bisa dikatakan bilangan prima sekaligus bilangan ganjil.

Contoh 1.5

Mana diantara proposisi majemuk $p \vee q$ berikut yang bernilai benar dan mana yang bernilai salah.

1. 2 + 1 = 3 atau Irian Jaya terletak di Indonesia Timur.
2. 8 habis dibagi 2 atau 7 bilangan genap
3. 7 + 2 = 10 atau 8 < 11.
4. 2 + 1 = 5 dan Bogor terletak di Jawa Timur

Penyelesaian:

1. Benar karena proposisi p benar dan q benar maka proposisi $p \vee q$ juga benar (menurut baris ke-1 tabel kebenaran)
2. Benar (baris ke-2 tabel kebenaran)
3. Benar (baris ke-3 tabel kebenaran)
4. Salah (baris ke-4 tabel kebenaran)

Contoh 1.6

Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan-pernyataan berikut!

a. $p \vee -q$

b. $-p \vee -q$

c. $-p \wedge q$

d. $(p \vee q) \wedge r$

Penyelesaian:

a.

p	**q**	**-q**	**p ∨ -q**
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

b.

p	**q**	**-p**	**-q**	**-p ∨ -q**
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

c.

p	q	-p	p ∧ -q
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

d.

p	q	r	(p ∨ q)	(p ∨ q) ∧ r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

1.4 Implikasi [→]

Misalkan p dan q adalah suatu proposisi. Implikasi dari "p implikasi q", yang disimbolkan dengan p → q adalah proposisi yang bernilai salah, jika nilai p bernilai benar dan nilai q bernilai salah, dan jika lainnya pasti benar. Pada implikasi ini, p disebut *antecedent* (hipotesa/premis) dan q disebut *consequence* (kesimpulan). Di bawah ini adalah tabel kebenaran dari Implikasi.

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Contoh 1.7

p = besok cerah

q = aku akan kerumahmu

Maka $p \rightarrow q$: Jika besok cerah maka aku akan kerumahmu.

Kalimat $p \rightarrow q$ dapat dibaca dalam beberapa bentuk kalimat antara lain:

- Bila p maka q
- q apabila p
- p hanya bila q
- p adalah syarat cukup untuk q
- q adalah syarat perlu untuk p

1.5 Biimplikasi [↔]

Misalkan p dan q adalah proposisi. Biimplikasi "p jika dan hanya jika q", yang disimbolkan dengan $p \leftrightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai benar, jika nilai p bernilai benar dan q bernilai benar, dan nilai p bernilai salah dan nilai q bernilai salah. Di bawah ini adalah tabel kebenaran dari Biimplikasi.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Contoh 1.8

Tentukan nilai kebenaran biimplikasi di bawah ini!

a. $20 + 7 = 27$ jika dan hanya jika 27 bukan bilangan prima.

b. $2 + 5 = 7$ jika dan hanya jika 7 adalah bilangan genap.

c. $\tan^2 45° + \cos^2 45° = 2$ jika dan hanya jika $\tan^2 45° = 2$.

Penyelesaian:

a. $20 + 7 = 27$ (benar) dan 27 bukan bilangan prima (benar) maka kalimat tersebut bernilai **benar.**

b. $2 + 5 = 7$ (benar) dan 7 adalah bilangan genap (salah) maka kalimat tersebut bernilai **salah.**

c. $\tan^2 45° + \cos^2 45° = 2$ (salah) dan $\tan^2 45° = 2$ (salah) maka kalimat tersebut bernilai **benar.**

Rangkuman

1. Negasi suatu kalimat akan mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan dengan nilai kebenaran kalimat aslinya.
2. Konjungsi merupakan proposisi "p dan q", yang disimbolkan dengan $p \wedge q$, adalah proposisi yang bernilai benar, hanya jika p dan q keduanya bernilai benar, yang lainnya bernilai salah.
3. Disjungsi merupakan proposisi "p atau q", yang disimbolkan dengan $p \vee q$, adalah proposisi yang bernilai salah, jika nilai p dan q keduanya bernilai salah, maka lainnya pasti bernilai benar.
4. Misalkan p dan q adalah suatu proposisi. Implikasi dari "p implikasi q", yang disimbolkan dengan $p \rightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai salah, jika nilai p bernilai benar dan nilai q bernilai salah, dan jika lainnya pasti benar.
5. Misalkan p dan q adalah proposisi. Biimplikasi "p jika dan hanya jika q", yang disimbolkan dengan $p \leftrightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai benar, jika nilai p bernilai benar dan q bernilai benar, dan nilai p bernilai salah dan nilai q bernilai salah.

Latihan

1. Diketahui p: 12 adalah bilangan genap dan q: 4 adalah faktor dari 30. Tulislah lambang-lambang dibawah ini dalam bahasa sehari-hari!
   a. $p \wedge q$
   b. $q \wedge p$
   c. $p \wedge -q$
   d. $-(p \wedge q)$
   e. $-p \wedge -q$

2. Tentukan konjungsi dan disjungsi dari masing-masing pasangan berikut beserta nilai kebenarannya!
   a. p: 7 adalah bilangan prima
      q: 7 adalah faktor dari 21
   b. p: $3 > 8$
      q: $4 < 7$
   c. p: 4 adalah faktor dari 7
      q: $7 – 5 = 2$

3. Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan-pernyataan berikut!
   a. $(p \wedge q) \vee -p$
   b. $(p \wedge -q) \vee (-p \wedge q)$
   c. $-(p \vee r) \wedge -q$
   d. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
   e. $p \leftrightarrow -q$

4. Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan-pernyataan berikut!
   a. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
   b. $(p \wedge q) \vee (((\neg p \wedge q) \rightarrow p) \wedge \neg q)$

5. Misalkan:
   p : David sedang bermain di kolam
   q : David ada didalam rumah

r : David sedang mengerjakan PR

s : David sedang mendengarkan radio

Nyatakanlah kalimat-kalimat dibawah ini dengan simbol-simbol logika beserta dengan penghubung-penghubungnya!

a. David sedang bermain dikolan atau ia ada didalam rumah.
b. David tidak bermain di kolam dan tidak sedang mengerjakan PR.
c. David sedang bermain dikolam dan tidak sedang mengerjakan PR.
d. Jika David ada didalam rumah dan tidak mengerjakan PR, ia pasti sedang bermain di kolam sambil mendengarkan radio.
e. David sedang mendengarkan radio jika ia ada di dalam rumah.

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL LOGIKA MATEMATIKA

MULTI PENGHUBUNG

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #3
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami konsep pendalaman pembentukan tabel kebenaran dengan konsep multi penghubung (konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi), pemahaman tautologi, kontradiksi dan kontingensi serta kaitan antara implikasi dengan kontraposisi, invers dan konvers.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Multi penghubung konsep implikasi (konvers, invers, kontraposisi) 1.2. Pemahaman tautologi, kontradiksi dan kontigensi 1.3. Tabel kebenaran multi penghubung
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. Multi penghubung konsep implikasi (konvers, invers, kontraposisi)

Definisi:

Misalkan diberikan proposisi bersyarat p → q, maka proposisi:

- ☐ Konvers dari implikasi p → q adalah q → p
- ☐ Invers dari implikasi p → q adalah –p → –q
- ☐ Kontraposisi dari implikasi p → q adalah –q → –p

p	q	-p	-q	p → q	q → p	-p → -q	-q → -p
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 1.1

Diketahui proposisi "Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya." Lambangkan proposisi bersyarat tersebut, kemudian tentukan konvers, invers dan kontraposisi dalam bentuk kalimat.

Penyelesaian:

Proposisi-proposisi tunggalnya adalah

p : Amir mempunyai mobil

q : Amir orang kaya

a. Konvers: Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil.

b. Invers: Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya.

c. Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil.

2. Pemahaman Tautologi, Kontradiksi dan Kontigensi

a. Tautologi

Argumen yang dibuktikan validitasnya dengan tabel kebenaran harus menunjukkan nilai benar. Jika pada tabel kebenaran untuk semua pasangan nilai variabel-variabel proposional yang ada bernilai benar atau *True*, maka disebut Tautologi.

Contoh 1.2

Buktikan dengan menggunakan tabel kebenaran apakah (p$\vee$-p) adalah tautologi!

Penyelesaian:

p	~p	p v ~p
T	F	T
F	T	T

b. Kontradiksi

Kebalikan dari tautologi adalah kontradiksi, yakni jika pada semua pasangan nilai dari tabel kebenaran menghasilkan nilai salah atau *False*.

Contoh 1.3

Buktikan dengan menggunakan tabel kebenaran apakah (p $\wedge$ -p) adalah kontradiksi!

Penyelesaian:

p	~p	p ∧ ~p
T	F	F
F	T	F

c. Kontigensi

Kontigensi adalah suatu proposisi majemuk yang bukan termasuk tautologi dan bukan juga kontradiksi.

Contoh 1.4

Buktikan dengan menggunakan tabel kebenaran apakah (p $\vee$ q) adalah kontigensi!

Penyelesaian:

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Dengan demikian Tautologi selalu memiliki nilai kebenaran T, sedangkan kontradiksi selalu memiliki nilai kebenaran F dan kontigensi selalu memiliki nilai kebenara T dan F.

3. Tabel kebenaran multi penghubung

Suatu proposisi yang dinyatakan dengan :

P(p,q,....), Q(p,q,....), ...atau P,Q,.... Adalah polinomial Boole dalam variabel p,q,.... Untuk menentukan harga kebenaran dari suatu proposisi dapat digunakan Tabel Kebenaran (Truth Table).

Contoh 1.5

Tentukan apakah dari ekspresi-ekspresi logikan berikut termasuk tautologi, kontradiksi atau kontigensi!

a. $\neg\neg p \rightarrow p$

p	$\neg$ p	$\neg\neg$ p	$\neg\neg p \rightarrow p$
T	F	T	T
F	T	F	T

Jawab: Tautologi

b. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$(q \rightarrow p)$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**

Jawab: Tautologi

c. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

Jawab: Kontigensi

d. $\neg(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

p	**q**	**r**	$(q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$(p \vee (q \wedge r)$	$\neg(p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\neg(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**

Jawab: Kontigensi

Rangkuman

1. Multi penghubung konsep implikasi (konvers, invers, kontraposisi)

   Konvers dari implikasi $p \rightarrow q$ adalah $q \rightarrow p$

   Invers dari implikasi $p \rightarrow q$ adalah $–p \rightarrow –q$

   Kontraposisi dari implikasi $p \rightarrow q$ adalah $–q \rightarrow –p$
2. Jika pada tabel kebenaran untuk semua pasangan nilai variabel-variabel proposional yang ada bernilai benar atau *True*, maka disebut Tautologi.
3. Kebalikan dari tautologi adalah kontradiksi, yakni jika pada semua pasangan nilai dari tabel kebenaran menghasilkan nilai salah atau *False*.
4. Kontigensi adalah suatu proposisi majemuk yang bukan termasuk tautologi dan bukan juga kontradiksi.
5. Dua proposisi p dan q disebut ekivalen logik bila keduanya mempunyai tabel kebenaran yang sama.

Latihan

1. **Buktikan bahwa ekspresi-ekspresi logika berikut ini ekivalen dengan menggunakan tabel kebenaran.**
   a. $\neg A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
   b. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \equiv T$
   c. $(A \vee \neg B) \rightarrow C \equiv (A \wedge B) \vee C$
   d. $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
   e. $\neg(\neg(A \wedge B) \vee B) \equiv F$
2. **Tentukan apakah dari ekspresi-ekspresi logika berikut termasuk tautologi, kontradiksi atau kontigensi.**
   a. $\neg \neg A \rightarrow A$
   b. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
   c. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
   d. $A \rightarrow B \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
   e. $\neg(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
   f. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
   g. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
3. **Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari:**

   "Jika Budi rajin belajar maka dia naik kelas."

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL LOGIKA MATEMATIKA

EKUIVALENSI HUKUM LOGIKA

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #4
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat menyelesaikan pola ekuivalensi dengan menggunakan tabel dan hukum logika.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Ekuivalensi dengan tabel 1.2. Hukum Logika 1.3. Ekuivalensi dengan hukum logika
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. Ekuivalensi Dengan Tabel

Dua proposisi p dan q disebut ekivalen logik bila keduanya mempunyai tabel kebenaran yang sama.

Perhatikan proposisi berikut !

1) Dewi sangat cantik dan peramah.
2) Dewi peramah dan sangat cantik.

Dari kedua pernyataan tersebut diatas, secara sekilas tampak ekivalen atau sama saja, yang dalam bentuk ekspresi logika dapat ditampilkan berikut ini:

p: Dewi sangat cantik

q: Dewi peramah

Maka ekspresi logika tersebut adalah :

1) $p \wedge q$
2) $q \wedge p$

Jika kedua ekspresi logika tersebut ekivalen secara logis, maka dapat ditulis

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

Dua proposisi p dan q disebut ekivalen logik bila keduanya mempunyai tabel kebenaran yang sama.

Contoh 1.1

Buktikan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$!

Penyelesaian :

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	**T**	**T**
T	F	F	T	**F**	**F**
F	T	T	F	**F**	**F**
F	F	T	T	**T**	**T**

Terbukti ekivalen.

2. Hukum Logika (Aljabar Proposisi)

Digunakan untuk membuktikan:

- Dua proposisi ekuivalen (selain menggunakan tabel kebenaran).
- Suatu proposisi tautologi atau kontradiksi (selain menggunakan tabel kebenaran).
- Membuktikan ke-sah-an suatu argumen.

Berikut hukum-hukum yang berlaku pada aljabar proposisi:

a. Hukum Idempoten
   - $(p \vee p) \equiv p$
   - $(p \wedge p) \equiv p$

b. Hukum Assosiatif
   - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
   - $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

c. Hukum Komutatif
   - $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
   - $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

d. Hukum Distributif
   - $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
   - $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

e. Hukum Identitas
   - $p \vee F \equiv p$
   - $p \vee T \equiv T$
   - $p \wedge F \equiv F$
   - $p \wedge T \equiv p$

f. Hukum Komplemen
   - $p \vee \sim p \equiv T$
   - $p \wedge \sim p \equiv F$
   - $\sim(\sim p) \equiv p$
   - $\sim(T) \equiv F$ dan $\sim (F) \equiv T$

g. Transposisi
   - $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

h. Hukum Implikasi
   - $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

i. Hukum Ekivalensi
   - $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
   - $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

j. Hukum Eksportasi
   - $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

k. Hukum de Morgan

- $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

3. Ekuivalensi Dengan Hukum Logika

- Proposisi berikut adalah ekivalen logik:

$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee F \equiv p$	$p \wedge T \equiv p$
$p \vee T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$
$p \vee \sim p \equiv T$	$p \wedge \sim p \equiv F$
$\sim\sim p \equiv p$	$\sim T \equiv F, \quad \sim F \equiv T$
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$P \vee P \equiv P$	Hukum Idempoten
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	Hukum Asosiatif
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	Hukum Komutatif
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Hukum Distributif
$P \vee F \equiv P$	Hukum Identitas

$P \vee T \equiv T$	Hukum Identitas
$P \vee \sim P \equiv T$	Hukum Komplemen
$\sim\sim P \equiv P$	Hukum Komplemen
$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$	Hukum De Morgan

Contoh 1.2

Tunjukkan dengan menggunakan tabel kebenaran dan aljabar proposisi bahwa $p \vee \sim (p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logik!

Penyelesaian:

- Tabel Kebenaran

p	q	-q	(p v q)	-(p v q)	$p \vee -(p \vee q)$		$p \vee -q$
T	T	F	T	F	**T**		**T**
T	F	T	T	F	**T**		**T**
F	T	F	T	F	**F**		**F**
F	F	T	F	T	**T**		**T**

Terbukti Ekivalen.

- Aljabar Proposisi

$p \vee -(p \vee q)$	$\equiv p \vee -q$	
$\Leftrightarrow p \vee (-p \wedge -q)$	$\equiv p \vee -q$	(Hukum De Morgan)
$\Leftrightarrow (p \vee -p) \wedge (p \vee -q)$	$\equiv p \vee -q$	(Hukum distributif)
$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee -q)$	$\equiv p \vee -q$	(Hukum komplemen)
$\Leftrightarrow p \vee -q$	$\equiv p \vee -q$	(Hukum identitas)

Contoh 1.3

Tunjukkan dengan menggunakan tabel kebenaran dan aljabar proposisi bahwa $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ keduanya ekivalen secara logik!

- Tabel Kebenaran

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$		p
T	T	T	**T**		**T**
T	F	T	**T**		**T**
F	T	T	**F**		**F**
F	F	F	**F**		**F**

Terbukti Ekivalen.

- Aljabar Proposisi

$p \wedge (p \vee q)$	$\equiv p$	
$(p \vee F) \wedge (p \vee q)$	$\equiv p$	(Hukum Identitas)
$p \vee (F \wedge q)$	$\equiv p$	(Hukum distributif)
$p \vee F$	$\equiv p$	(Hukum Identitas)
p	$\equiv p$	(Hukum Identitas)

Rangkuman

1. Dua proposisi p dan q disebut ekivalen logik bila keduanya mempunyai tabel kebenaran yang sama.
2. Hukum Logika (Aljabar Proposisi) digunakan untuk membuktikan:
   - Dua proposisi ekuivalen (selain menggunakan tabel kebenaran).
   - Suatu proposisi tautologi atau kontradiksi (selain menggunakan tabel kebenaran).
   - Membuktikan ke-sah-an suatu argumen.

Latihan

1. Buktikan bahwa ekspresi-ekspresi logika berikut ini ekivalen dengan menggunakan tabel kebenaran.
    a. $\neg A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
    b. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \equiv T$
    c. $(A \vee \neg B) \rightarrow C \equiv (A \wedge B) \vee C$
    d. $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
    e. $\neg(\neg(A \wedge B) \vee B) \equiv F$
2. Gunakan dalil de morgan untuk menentukan proposisi yang ekuivalen dengan :
    a. $\sim (p \vee \sim q)$
    b. $\sim ((\sim p \wedge q) \vee \sim r)$
    c. $\sim (\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(r \wedge \sim s))$
3. Buktikan bahwa :
    a. $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (\sim q \wedge r)$
    b. $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge (r \vee \sim q)) \equiv \sim(q \vee p)$
    c. $p \vee (p \wedge (p \vee q)) \equiv p$

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL LOGIKA MATEMATIKA

INFERENSI LOGIKA

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

MODUL PERKULIAHAN #5
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah dengan memanfaatkan metode inferensi untuk mendapatkan suatu kesimpulan dari hipotesa-hipotesa yang ada.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep Inferensi 1.2. Penggunaan Inferensi
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. Konsep Inferensi

Logika selalu berhubungan dengan pernyataan-pernyataan yang ditentukan nilai kebenarannya. Sering kali diinginkan untuk menentukan benar tidaknya kesimpulan berdasarkan sejumlah kalimat yang diketahui nilai kebenarannya.

1.1 Argumen valid (sah) dan invalid (tidak sah)

Argumen adalah rangkaian-rangkaian kalimat. Semua kalimat-kalimat tersebut kecuali yang terakhir disebut hipotesa (premis atau asumsi), kalimat terakhir disebut kesimpulan (konklusi).

Secara umum, hipotesa dan kesimpulan dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{array}\right\} \text{hipotesa} \\ \hline \therefore K \quad \} \quad \text{kesimpulan} \end{array}$$

Suatu argumen dikatakan valid (sah) apabila untuk sembarang pernyataan yang disubtitusikan kedalam hipotesa, jika semua hipotesa tersebut benar, maka kesimpulan juga benar. Sebaliknya, meskipun semua hipotesa benar tetapi ada kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut dikatakan Invalid (tidak sah). Suatu argumen dikatakan valid (sah) jika bentuk proposisinya adalah suatu tautologi. Suatu argumen dikatakan invalid (tidak sah) jika proposisinya bukan tautologi. Pembuktian argumen valid (sah) atau invalid (tidak valid) dapat menggunakan pembuktian tabel kebenaran atau penggunaan hukum logika (aljabar proposisi).

Contoh 1.

Periksa apakah argumen berikut sah atau tidak sah dengan menggunakan tabel kebenaran dan hukum logika (aljabar proposisi).

"Jika hari hujan maka saya membawa payung. Ternyata, saya tidak membawa payung. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa hari tidak hujan."

Penyelesaian :

Misalkan : p : hari hujan

q : saya membawa payung

Argumen diatas biasa dituliskan sebagai berikut ini :

$$\begin{array}{lcl} P_1 & : & p \rightarrow q \\ P_2 & : & \sim q \\ \hline \therefore K & : & \sim p \end{array}$$

- Untuk memeriksa apakah argumen tersebut sah atau tidak sah, maka harus diperiksa apakah implikasi $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow K$ berupa suatu tautologi dengan menggunakan tabel kebenaran.

p	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Terbukti benar Tautologi, sehingga argumen tersebut valid (sah).

- Pembuktian dengan menggunakan hukum logika (aljabar proposisi).

Perlu diingat :
$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (Hukum Implikasi)

$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow K$
$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
$((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
$\sim((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee \sim p$
$(p \wedge \sim q) \vee q \vee \sim p$
$(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \vee \sim p$
$(p \vee q) \wedge T \vee \sim p$
$(p \vee q) \vee \sim p$
$p \vee \sim p \vee q$
$T \vee q$
T

$\therefore$ **terbukti benar Tautologi, maka argumen tersebut valid (sah)**

2. Penggunaan Inferensi

Ada beberapa metode inferensi yang merupakan teknik untuk menurunkan kesimpulan berdasarkan hipotesa yang ada, tanpa harus menggunakan tabel kebenaran. Beberapa metode inferensi untuk menentukan kevalidan suatu argumen adalah sebagai berikut:

2.1 Modus Ponens

Perhatikanlah implikasi "jika p maka q" yang diasumsikan bernilai benar. Apabila selanjutnya diketahui bahwa p benar, supaya implikasi p $\rightarrow$ q benar, maka q juga harus bernilai benar. Inferensi seperti itu disebut Modus Ponens. Secara simbolik, Modus Ponens dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{p} \\ \hline \therefore \mathbf{q} \end{array}$$

Contoh 3.

Jika digit terakhir suatu bilangan adalah 0, maka bilangan tersebut habis dibagi 10.
Digit terakhir suatu bilangan adalah 0
____
$\therefore$ Bilangan tersebut habis dibagi 10

2.2 Modus Tollens

Bentuk modus Tollens mirip dengan Modun Ponens, hanya saja hipotesa kedua dan kesimpulan merupakan kontraposisi hipotesa pertama modus ponens. Hal ini mengingat kenyataan bahwa suatu implikasi selalu ekuivalen dengan kontraposisinya. Secara simbolik, bentuk inferensi Modus Tollens adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{\sim q} \\ \hline \therefore \mathbf{\sim p} \end{array}$$

Contoh 4.

Jika Zeus seorang manusia, maka ia dapat mati
Zeus tidak dapat mati
____
$\therefore$ Zeus bukan seorang manusia

2.3 Silogisme Hipotesis

Prinsip inferensi Silogisme Hipotesis adalah jika dua implikasi p $\rightarrow$ q dan q $\rightarrow$ r adalah benar, maka kesimpulan p $\rightarrow$ r juga benar. Dengan lambang, kaidah silogisme dapat dituliskan dengan:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Contoh 5.

Jika 18486 habis dibagi 18, maka 18486 habis dibagi 9

Jika18486 habis dibagi 9, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9

∴ Jika 18486 habis dibagi 18, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9

2.4 Silogisme Disjungtif

Prinsip dasar Silogisme Disjungtif adalah kenyataan bahwa apabila kita diperhadapkan pada satu diantara 2 pilihan yang ditawarkan (A atau B), sedangkan kita tidak memilih A, maka satu-satunya pilihan yang mungkin adalah memilih B. Hal ini sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Jika seseorang ditanyai oleh penjual di warung: "kamu minum es jeruk atau es teh?" dan orang yang ditanyai tersebut harus memilih salah satu, sedangkan ia tidak suka es jeruk, pastilah ia memilih es teh.

Secara simbolik, bentuk metode inferensi Silogisma Disjungtif adalah sebagai berikut:

a. $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

b. $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Contoh 6.

Kunci kamarku ada di sakuku atau tertinggal di rumah

Kunci kamarku tidak ada di sakuku

∴ Kunci kamarku tertinggal di rumah

2.5 Penambahan Disjungtif

Inferensi Penambahan Disjungtif didasarkan atas fakta bahwa suatu kalimat dapat digeneralisasikan dengan penghubung "v". Alasannya adalah karena penghubung "v" bernilai benar jika salah satu komponennya bernilai benar.

Sebagai contoh, perhatikan kalimat yang diucapkan Monde: "Saya suka jeruk" (bernilai benar). Kalimat tersebut tetap bernilai benar jika ditambahkan kalimat lain dengan penghubung "v". Jadi kalimat "Saya suka jeruk atau durian" yang diucapkan Monde juga tetap bernilai benar dan tidak tergantung pada suka/tidaknya Monde akan durian.

Bentuk simbolis metode Inferensi Penambahan Disjungtif adalah sebagai berikut:

a. $$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

b. $$\frac{q}{\therefore\ p \vee q}$$

Contoh 7.

Simon adalah siswa SMU (Sekolah Menengah Umum)

∴ Simon adalah siswa sekolah menengah (SMU atau SMP)

2.6 Penyederhanaan Konjungtif

Inferensi Penyederhanaan Konjungtif merupakan kebalikan dari inferensi Penambahan Disjungtif. Jika beberapa kalimat dihubungkan dengan penghubung "∧", kalimat tersebut dapat diambil salah satunya secara khusus. Penyempitan kalimat ini merupakan kebalikan dari Penambahan Disjungtif yang merupakan perluasan suatu kalimat. Bentuk simbolis metode inferensi Penyederhanaan Konjungtif adalah sebagai berikut:

a. $$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

b. $$\frac{p \wedge q}{\therefore\ q}$$

Contoh 8.

Lina menguasai bahasa Basic dan Pascal

∴ Lina menguasai bahasa Basic

Penghubung "dan" dalam hipotesa di atas berarti Lina menguasai bahasa Basic dan sekaligus Lina menguasai bahasa Pascal, sehingga secara khusus dapat dikatakan bahwa Lina menguasai Basic.

2.7 Konjungsi

Prinsip Inferensi Konjungsi adalah jika ada 2 kalimat yang masing-masing benar, maka gabungan kedua kalimat tersebut dengan menggunakan penghubung

"$\wedge$" (Konjungsi) juga bernilai benar. Bentuk inferensi dengan Konjungsi adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \quad p \\ \quad q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Contoh 9.

Perhatikan argumen berikut :

"Ronaldo tidak berambut gondrong atau Rivaldo mendapat sepatu emas. Jika Rivaldo mendapat sepatu emas, maka Zidano membeli talas di Bogor. Ronaldo berambut gondrong atau tadi pagi turun hujan. Ternyata, Zidano tidak membeli talas di Bogor. Jadi kesimpulannya, tadi pagi turun hujan."

Tentukan kesahan argumen tersebut!

Penyelesaian:

p : Ronaldo berambut gondrong

q : Rivaldo mendapatkan sepatu emas

r : Zidano membeli talas di bogor

s : tadi pagi turun hujan

Argumen tersebut dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{array}{ll} P_1 : \sim p \vee q & \equiv p \rightarrow q \\ P_2 : q \rightarrow r & \\ P_3 : p \vee s & \equiv \sim p \rightarrow s \\ P_4 : \sim r & \\ \hline K : s & \end{array}$$

Dengan menggunakan aturan inferensia diperoleh:

$$\begin{array}{ll} P_1 : p \rightarrow q & \\ P_2 : q \rightarrow r & \\ \hline K_1 : p \rightarrow r & \text{(kaidah silogisme)} \\ P_4 : \sim r & \\ \hline K_2 : \sim p & \text{(modus tollens)} \\ P_3 : \sim p \rightarrow s & \\ \hline K \ \ : s & \text{(modus ponens)} \end{array}$$

Jadi argumen tersebut valid (sah).

Rangkuman

1. Argumen adalah rangkaian-rangkaian kalimat. Semua kalimat-kalimat tersebut kecuali yang terakhir disebut hipotesa (premis atau asumsi), kalimat terakhir disebut kesimpulan (konklusi).
2. Pembuktian argumen valid (sah) atau invalid (tidak valid) dapat menggunakan pembuktian tabel kebenaran atau penggunaan hukum logika (aljabar proposisi).
3. Metode-metode Inferensi

<table>
<tr><th>ATURAN</th><th colspan="2">BENTUK ARGUMEN</th></tr>
<tr><td>Modus Ponens</td><td colspan="2">$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Modus Tollens</td><td colspan="2">$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Silogisme Hipotesis</td><td colspan="2">$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Silogisme Disjungtif</td><td>$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Penambahan Disjungtif</td><td>$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Penyederhanaan Konjungtif</td><td>$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Konjungsi</td><td colspan="2">$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$</td></tr>
</table>

Latihan

1. Periksa apakah argumen berikut Valid atau Invalid dengan menggunakan tabel kebenaran dan hukum logika (aljabar proposisi).
   a. "Jika gaji pegawai negri naik, maka harga sembako naik. Jika harga sembako naik, maka masyarakat berpenghasilan kurang dari Rp 1.000.000 per bulan akan menderita penyakit maag. Jadi, dapat disimpulkan bahwa jika gaji pegawai negri naik, maka masyarakat berpenghasilan kurang dari Rp 1.000.000 per bulan akan menderita penyakit maag."
   b. "Jika hari ini hari ulang tahunku, maka pastilah hari ini tanggal 25 Desember. Hari ini tanggal 25 Desember. Oleh karena itu, hari ini adalah hari ulang tahunku."
   c. "Jika terdakwa bersalah, maka dia akan berada ditempat kejadian perkara. Terdakwa tidak berada ditempat kejadian perkara. Jadi terdakwa tidak bersalah."
   d. "Bayi tidak lapar atau dia menangis. Bayi tertawa atau dia tidak menangis. Jika bayi tertawa, maka mukanya merah. Jadi, jika bayi lapar maka mukanya merah."
2. Buktikan kevalidan Argumen di bawah inidengan menggunakan prinsip-prinsip inferensi logika.

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \wedge q) \rightarrow r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL LOGIKA MATEMATIKA

KONSEP DASAR KUANTOR

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #6
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami konsep dasar dari kuantor (universal dan eksistensial).
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Prinsip universal dan eksistensial 1.2. Penggunaan konsep kuantor pada suatu kalimat 1.3. Keterkatan kuantor dan pembentukan variabel dan kata penghubung 1.4. Ingkaran kuantor
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

Pada bab ini kita akan belajar logika matematika. Hal terpenting yang akan kamu dapatkan setelah mempelajari materi logika matematika adalah kemampuan atau keahlian mengambil kesimpulan dengan "benar " atau "salah". Logika matematika memberikan dasar bagi sebuah pengambilan kesimpulan, dan sebagai dasar dia dapat digunakan dalam banyak aspek kehidupan.

Pada bab ini akan fokus membahas tentang pernyataan berkuantor dan penarikan kesimpulan.

Pernyataan Berkuantor.

KUANTOR adalah pengukur kuantitas atau jumlah. Pernyataan berkuantor artinya pernyataan yang mengandung ukuran kuantitas atau jumlah. Biasaanya pernytaan berkuantor mengandung kata *semua, setiap, beberapa, ada,* dan sebagainya. Kata semua, setiap beberapa, ada, atau tiap-tiap merupakan kuantor karena kata-kata tersebut menyatakan ukuran jumlah. Kuantor dibagi menjadi dua bagian, yaitu:

1. Kuantor universal
2. Kuantor eksistensial.

1. Prinsip Universal Dan Eksistensial

1.1 Kuantor Universal

Kuantor universal contohnya adalah *semua, untuk setiap,* atau *untuk tiap-tiap*. Berikut ini beberapa contoh pernyataan yang menggunakan kuantor universal.

a. *Semua* kucing mengeong.
b. *Tiap-tiap* manusia yang dilahirkan memilikim seorang ibu.
c. *Setiap* benda langit berbentuk bola.
d. *Setiap* bilangan asli lebih besar daripada nol.

Misalkan p(x) adalah kalimat terbuka yang didefinisikan pada himpunan semesta S, maka pernyataan:

"Untuk setiap x di dalam S, maka p(x) benar."

Disebut pernyataan kuantor universal dan kata untuk setiap dalam pernyataan di atas disebut kuantor universal.

Kata-kata yang sering muncul/dipakai dalam pernyataan kuantor universal adalah semua dan untuk setiap. Simbol matematis untuk kedua kata tersebut adalah **"∀".**

Dalam aljabar, pernyataan kuantor universal ini dapat digunakan untuk mengubah kalimat terbuka menjadi kalimat tertutup (pernyataan). Misalkan p(x) adalah sebuah kalimat terbuka, maka untuk menyatakan himpunan penyelesaian dari p(x) pada himpunan semesta S dapat ditulis sebagai berikut:

$\forall x$, p(x) dibaca "semua x bersifat p(x)".

$\forall x \in S$, p(x) dibaca "semua x anggota S bersifat p(x)".

Nilai kebenaran dari pernyataan berkuantor $\forall x$, p(x) bergantung pada himpunan semesta yang ditinjau dan kalimat terbuka p(x).

Contoh 1.

Apabila p(x): $x + 4 > 3$ dengan himpunan semesta Z (himpunan bilangan asli), maka pernyataan: $\forall x \in Z; x + 4 > 3$ adalah suatu pernyataan yang bernilai benar, karena HP = {1, 2, 3, 4, ...} = Z

1) Apabila q(x): $x + 1 > 8$ dengan himpunan semesta Z (himpunan bilangan asli), maka pernyataan: $\forall x \in Z; x + 1 > 8$ adalah suatu pernyataan yang bernilai salah, karena untuk x = 1, $1 + 1 < 8$. HP = {8, 9, 10, ...} $\neq$ Z

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Apabila $\{x \mid x \in Z, p(x)\} = Z$ maka $\forall x \in Z$, p(x) adalah benar.

Apabila $\{x \mid x \in Z, p(x)\} \neq Z$ maka $\forall x \in Z$, p(x) adalah salah.

1.2 Kuantor Eksistesial

Eksistensial merupakan kata sifat dari eksis, yaitu keberadaan. Kuantor eksistensial artinya penukur jumlah yang menunjukkan keberadaan. Dalam matematika "ada" artinya tidak kosong atau setidaknya satu. Contoh kuantor eksistensial adalaha *ada, beberapa, terdapat,* atau *sekurang-kurangnya satu.* Berikut beberapa contoh pernyataan menggunakan kuantor eksistensial.

a. *Ada* rumah yang tak memiliki jendela.
b. *Ada* bilangan cacah yang kurang dari satu.
c. *Beberapa* presiden adalah wanita.
d. *Terdapat* bilangan asli *x* yang jika dikalikan 5 hasilnya 6,24.

Misalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka yang didefinisikan pada himpunan semesta S, maka pernyataan: "ada x di dalam S sedemikian sehingga p(x) benar" disebut pernyataan eksistensial (khusus) dan kata ada dalam pernyataan di atas disebut kuantor eksistensial.

Kata-kata yang sering muncul/dipakai dalam pernyataan eksistensial adalah ada, beberapa, dan paling sedikit satu. Simbol matematis untuk ketiga kata tersebut sama yaitu **"∃".**

$\exists\ x \in Z$, p(x) dibaca "ada nilai x anggota Z sedemikian sehingga p(x) menjadi pernyataan benar" atau secara singkat dapat dikatakan "terdapat x yang bersifat p(x)". Bentuk $\exists\ x \in Z$, p(x) dapat pula ditulis sebagai ∃x, p(x) bergantung pada himpunan semesta yang ditinjau dan kalimat terbuka p(x).

Contoh 2.

2) Apabila $\exists\ n \in Z,\ n + 4 < 7$, dengan Z = himpunan bilangan asli adalah pernyataan benar, karena: $\{n \mid n + 4 < 7\} = \{1, 2\}$
3) Apabila $\exists\ n \in Z,\ n + 6 < 4$, dengan Z = himpunan bilangan asli adalah pernyataan salah, karena: $\{n \mid n + 6 < 4\} = \{\ 1,2\ \}$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Apabila $\{x \mid p(x)\} \neq \{\ \ \}$ maka ∃x, p(x) adalah benar.

Apabila $\{x \mid p(x)\} = \{\ \ \}$ maka ∃x, p(x) adalah salah.

2. Penggunaan Konsep Kuantor Pada Suatu Kalimat

Pernyataan berkuantor universal bernilai benar jika pernyataan tersebut benar untuk semua semesta yang dibicarakan dan bernilai salah apabila terdapat sekurang-kurangnya satu anggota semesta yang menyebabkan pernyataan salah.

Pernyataan berkuantor universal “setiap bilanga asli lebih besar daripada nol” bernilai benar, karena pernyataan tersebut bernilai benar untuk setiap anggota bilangan asli. Dalam hal ini bilangan asli merupakan himpunan semesta pembicaraan. Sementara ini pernyataan “setiap benda langit berbentuk bola” pernyataan salah, karena walaupun kebanyakan benda langit bulat ada pula benda langit yang tidak bulat, misalnya asteroid.

Pernyataan berkuantor eksistensial bernilai benar jika sekurang-kurangnya satu anggota semesta menyebabkan pernyataan bernilai benar, dan bernilai salah jika tak ada satu pun dari anggota semesta menyebabkan pernyataan menjadi benar. Pernyataan " *Beberapa* presiden pad tahun 2003 adalah wanita" bernilai benar karena dari seluruh anggota himpunan presiden pada tahun 2003 memang ada presiden wanita, Presiden Megawati misalnya. Pernyataan " *Terdapat* bilangan asli *a* yang jika dikalikan dengan 5 hasilnya 6,24" bernilai salah, karena dari seluruh anggota himpunan bilangan asli, tak ada satupun *a* yang memenuhi *a x* 5 = 6,24.

Dalam matematika, kata-kata yang sering muncul biasanya diberi symbol tertentu. Berikut beberapa symbol untuk kuantor:

∀ = Untuk setiap

∃ = Terdapat

∋ = Sehingga

Kalimat "$\forall\, x \in \boldsymbol{R}, x > 0$" dibaca "untuk setiap x elemen bilangan real, $x > 0$"

Kalimat " $\exists\, x \in \boldsymbol{R} \ni x > 2$ " dibaca "terdapat $x \in \boldsymbol{R}$ sehingga $x > 2$"

Contoh 3.

Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berkuantor di bawah ini.

1. p_1: Semua ikan berkembang biak dengan bertelur.
2. p_2: Ada binatang yang memiliki alat kelamin ganda.
3. p_3: $\forall\, x \in \boldsymbol{R}, |x| > 0$.
4. p_4: $\exists\, x \in \boldsymbol{R} \ni x + 5 < 5$.

Penyelesaian:

1. $\tau(p_1) = \mathrm{S}$, karena ada jenis ikan hiu yang berkembang biak dengan beranak.
2. $\tau(p_2) = \mathrm{B}$, contohnya cacing.
3. $\tau(p_3) = \mathrm{S}$, ada $x \in \boldsymbol{R}$ yang tak memenuhi, yaitu $x = 0$.
4. $\tau(p_4) = \mathrm{S}$, karena tak ada bilangan asli yang memenuhi $x + 5 < 5$.

3. Keterkaitan Kuantor Dan Pembentukan Variabel Dan Kata Penghubung

Perhatikan pernyataan berikut ini :

"Semua mahasiswa harus rajin belajar"

Untuk melakukan pengkuantoran universal pada pernyataan tersebut maka dilakukan langkah-langkah seperti berikut :

1. Carilah lingkup (*scope*) dari kuantor universalnya, yaitu

   "Jika x adalah mahasiswa, maka x harus rajin belajar".

   Selanjutnya akan ditulis :

   mahasiswa(x) ⇒ harus rajin belajar(x)

2. Berilah kuantor universal di depannya

   (∀x)(mahasiswa(x) ⇒ harus rajin belajar(x))

3. Ubahlah menjadi suatu fungsi

   (Ax)(M(x) ⇒ B(x))

Contoh 4.

"Semua tanaman hijau membutuhkan air untuk tumbuh."

- Jika x adalah tanaman hijau, maka x membutuhkan air untuk tumbuh.
  Tanaman hijau (x) → membutuhkan air untuk tumbuh (x).
- $(\forall\, x)(Tanaman\ hijau(x) \rightarrow membutuhkan\ air\ untuk\ tumbuh\ (x))$
- $(\forall\, x)(T(x)$ →A(x))

4. Ingkaran Kuantor

4.1 Ingkaran Kuantor Universal.

Perhatikan dua pernyataan yang mengandung kuantor universal berikut.

1. p : semua kucing berwarna putih.
2. q : $\forall\, x \in \boldsymbol{R} \ni 2x \geq 2.$

Negasi dari p adalah $(\sim p)$:

Tidak benar bahwa semua kucing berwarna putih atau boleh juga dikatakan: "ada kucing yang tidak berwarna putih".

Negasi dari q adalah ($\sim q$) :

$\sim(\forall\ x \in \boldsymbol{R} \ni 2x \geq 2)$ atau $\exists\ x \in \boldsymbol{R} \ni 2x < 2$.

Secara umum ingkaran kuantor universal adalah sebagai berikut:

- ingkaran dari (semua) (p) adalah (terdapat)(p),
- ingkaran dari (untuk setiap x)(p(x)) adalah $(\exists x) \ni (\sim p(x))$.

$$\sim(\forall\ x(p(x)) \equiv\ (\exists x) \ni (\sim p(x))$$

Contoh 5.

a. ~ ($\forall$**x**, x^2 - x ≥ 0) = $\exists$**x**, x^2 – x < 0
b. Negasi dari pernyataan "**Semua** planet dalam sistem tata surya mengelilingi matahari." adalah "**Ada** planet dalam tata surya yang tidak mengelilingi matahari."

4.2 Ingkaran Kuantor Eksistensial

Perhatikan dua pernyataan yang mengandung kuantor eksistensial berikut.

a. Ada pria yang menyukai sepak bola.
b. $\exists\ y \in \boldsymbol{Z} \ni 2y = 1$

Negasi dari pernyataan pertama (a) adalah "Tidak ada pria yang menyukai sepak bola", atau "Semua pria tidak menyukai sepak bola".

Negasi dari pernyataan kedua (b) adalah "Tidak benar bahwa $\exists\ y \in \boldsymbol{Z} \ni 2y = 1$", atau dengan kalimat lain "$\forall\ y \in \boldsymbol{Z}, 2y \neq 1$.

Secara umum ingkaran kuantor eksistensial adalah sebagai berikut:

- Ingkaran dari (ada atau terdapat) (p) adalah (semua) (~p),
- Ingkaran dari $(\exists x) \ni p(x))$ adalah $(\forall x)(\sim p(x))$

$$\sim(\exists x) \ni p(x)) \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

Contoh 6.

a. ~ ($\exists$x, x^2 + 7x + 12 = 0) = $\forall$x, x^2 + 7x + 12 ≠ 0
b. Negasi dari pernyataan "ada ikan laut yang menyusui." adalah "semua ikan laut tidak menyusui."

Rangkuman

1. Pernyataan berkuantor dapat dibagi menjadi 2, yaitu :

   a. Kuantor Universal (Kuantor Umum)

      Dilambangkan dengan "$\forall$ " dibaca : *untuk semua* atau *untuk setiap***.**

      Notasinya $\forall$x, p(x) dibaca: *untuk setiap x, berlaku p(x).*

      $\forall$x, p(x) akan bernilai benar (B) jika dan hanya jika p(x) benar.

      $\forall$x, p(x) akan bernilai salah apabila ada x yang menyebabkan p(x) salah.

   b. Kuantor Eksistensial

      Dilambangkan dengan " $\exists$ " dibaca : *terdapat*, *ada*, *beberapa*, paling sedikit ada satu.

      otasinya $\exists$x , p(x) dibaca *: terdapat x sehingga berlaku p(x)*.

      $\exists$x , p(x) akan bernilai benar apabila ada x yang menyebabkan p(x) benar.

      kan bernilai salah apabila untuk semua x salah, maka p(x) salah.

2. Negasi (Ingkaran) Kalimat Berkuantor Umum

   $\sim \{\forall x , p(x)\} = \exists x , \sim p(x)$

   Negasi (Ingkaran) Kalimat Berkuantor Eksistensial

   $\sim \{\exists x , p(x)\} = \forall x , \sim p(x)$

Latihan

1. Manakah pernyataan-pernyataan dibawah ini yang merupakan pernyataan berkuantor? Jika berkuantor sebutkan jenisnya!
    a. Ada gajah yang tidak memiliki belalai.
    b. Soeharto pernah menjadi Presiden Republik Indonesia.
    c. Raul Gonzales adalah pemain Real Madrid.
    d. Semua orang asing berkulit putih.
    e. Setiap orang yang bekerja mendapatkan gaji.
    f. Lintah sawah tidak lebih berbahaya dari lintah darat.
    g. Beberapa murid membolos pelajaran matematika.
    h. Tidak ada orang yang tidak pernah berbuat salah.
    i. Sate kambing lebih mahal daripada sate ayam.
    j. Bumi berputar lebih cepat daripada bulan.
2. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut.
    a. $\forall x \in \boldsymbol{R} \ni \boldsymbol{x^2} \geq \boldsymbol{x}$
    b. $\exists y \in \boldsymbol{Z} \ni 3y = 4$
    c. Misalkan A={1,2,3,4,5}, $\exists x \in \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{3x^2 - 4x - 5 = 0}$.
    d. $\forall y \in (0, \frac{\pi}{2}) \ni \tan y > 0$
    e. Setiap berbuat kesalahan maka akan merasakan akibatnya.
    f. Ada Presiden Republik Indonesia yang tidak memiliki wakil presiden

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL LOGIKA MATEMATIKA

KONSEP METODE PEMBUKTIAN

MI041 – 3 SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #7
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat menentukan konsep metode pembuktian yang bisa digunakan untuk membuat suatu pembuktian dari suatu bentuk kalimat.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep metode pembuktian secara langsung 1.2. Konsep metode pembuktian secara tidak langsung • Kontradiktif • Kontrapositif • Vacuous • Trivial • Kasus • Equivalensi
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. Konsep Metode Pembuktian Secara Langsung

Pembuktian langsung dalam matematika dilakukan dengan menguraikan premis dengan dilandasi oleh difinisi, aksioma yang ada untuk sampai pada suatu kesimpulan (konklusi).

Misal terdapat implikasi $p \rightarrow q$ dan diasumsikan bahwa p benar. Jika kita dapat menunjukkan bahwa q benar, maka kita telah membuktikan bahwa implikasi $p \rightarrow q$ benar.

Contoh 1.

Buktikan bahwa jika n adalah bilangan genap, maka $(n+1)^2$ adalah bilangan ganjil.

Bukti :

p : n adalah bilangan genap (diasumsikan benar)

q : $(n+1)^2$ adalah bilangan ganjil

$$p \rightarrow q$$

Bentuk umum bilangan genap adalah 2k. Sedangkan bentuk umum bilangan ganjil adalah 2m + 1, dengan k dan m adalah bilangan bulat.

Karena n genap, maka n = 2k, dengan k = bilangan bulat

$(n+1)^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 +2k) + 1$

Karena k = bilangan bulat, maka $(2k^2 +2k)$ juga adalah bilangan bulat.

Jika $(2k^2 +2k)$ dimisalkan dengan m, maka : $(n+1)^2 = 2m + 1$ (q terbukti benar).

Karena p benar dan q terbukti benar, maka implikasi $p \rightarrow q$ terbukti benar.

2. Konsep Metode Pembuktian Secara Tidak Langsung

2.1 Pembuktian dengan Kontradiksi

Pada pembuktian dengan kontradiksi, langkah yang perlu dilakukan untuk membuktikan bahwa implikasi $p \rightarrow q$ bernilai benar adalah dengan menentukan ekuivalensinya terlebih dahulu, yaitu :

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

Jadi untuk membuktikan bahwa implikasi $p \rightarrow q$ merupakan pernyataan benar, kita perlu menunjukkan bahwa $(p \wedge \neg q)$ adalah pernyataan yang salah.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam pembuktian dengan kontradiksi adalah sebagai berikut:

1. Misalkan bahwa negasi dari statement yang akan dibuktikan benar.
2. Dengan langkah-langkah yang benar, tunjukkanlah bahwa pada akhirnya pemisalan tersebut akan sampai pada suatu kontradiksi.
3. Simpulkan bahwa statement yang akan dibuktikan benar.

Contoh 2.

Buktikan jika 3n + 1 adalah genap maka n ganjil.

Bukti :

$p \rightarrow q$

p : 3n + 1 adalah genap

q : n adalah ganjil (asumsikan benar)

$\neg q$: n adalah bilangan genap = 2k,

k = bilangan bulat.

p : 3n + 1 adalah bilangan genap

$3(2k) + 1 = 2(3k) + 1$ (salah)

Sehingga $(p \wedge \neg q)$ adalah pernyataan yang salah.

Jadi $p \rightarrow q$ terbukti benar.

Contoh 3.

Buktikan bahwa hasil kali 2 buah bilangan ganjil adalah bilangan ganjil.

Bukti:

Ambil sembarang 2 buah bilangan ganjil m dan n.

Andaikan hasil kalinya (m.n) adalah genap.

Karena m dan n adalah bilangan ganjil, maka

m = 2.k + 1 dan n = 2.s +1 untuk bilangan-bilangan bulat k dan s.

m.n = (2k+1)(2s+1)

= 4.k.s +2.s + 2.k + 1

= 2 (2.k.s + s + k) + 1

Misal p = 2.k.s + s + k. Maka p merupakan bilangan bulat karena k dan s adalah bilangan-bilangan bulat, sehingga

m.n = 2.p + 1 untuk suatu bilangan bulat p

Tampak bahwa m.n merupakan bilangan ganjil. Ini kontradiksi dengan pengandaian. Berarti pengandaiannya salah.

Terbukti bahwa hasil kali dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil.

2.2 Pembuktian dengan Kontraposisi

Kita telah mengetahui bahwa nilai kebenaran implikasi selalu sama dengan nilai kebenaran kontraposisinya. Jika nilai kebenaran dari implikasi $p \rightarrow q$ adalah benar maka nilai kebenaran kontrapositifnya, yaitu $\neg q \rightarrow \neg p$, juga benar.

Dalam bentuk simbol dapat ditulis :

$$(p \rightarrow q) \equiv \neg q \rightarrow \neg p.$$

Jadi untuk membuktikan nilai kebenaran suatu implikasi kita dapat membuktikannya melalui kontrapositifnya.

Contoh 4.

Buktikan bahwa jika $3n + 1$ adalah bilangan ganjil, maka n adalah bilangan genap.

Bukti :

p : "3n + 1 adalah bilangan ganjil"

q : "n adalah bilangan genap".

$\neg q$: " n adalah bilangan ganjil".

$\neg q = 2k + 1$

$3n + 1 = 3(2k+1) + 1 = 2(3k + 2) = \neg p$

Karena $\neg q \rightarrow \neg p$ bernilai benar, maka $p \rightarrow q$ bernilai benar.

2.3 Pembuktian Vacuous

Untuk menunjukkan bahwa implikasi $p \rightarrow q$ bernilai benar, kita cukup menunjukkan bahwa p bernilai salah.

Contoh 5.

Diketahui F(n) adalah fungsi proposisional "Jika $n > 1$, maka $n^2 > n$" Buktikan bahwa F(0) benar!

Bukti :

F(n) : "Jika $n > 1$, maka $n^2 > n$"

F(n) : $n > 1 \rightarrow n^2 > n$

p : "$n > 1$"

q : "$n^2 > n$".

$F(0) : 0 > 1 \rightarrow 0 > 0$

Karena p salah, maka F(0) benar.

2.4 Pembuktian Trivial

Untuk membuktikan implikasi $p \rightarrow q$, kita perlu menunjukkan bahwa q bernilai benar.

Contoh 6.

Diketahui F(n) adalah fungsi proposisional "Jika $a \geq b$,maka $a^n \geq b^n$". Buktikan bahwa F(0) benar!

Bukti :

F(n) : "Jika $a \geq b$, maka $a^n \geq b^n$"

$F(n) : a \geq b \rightarrow a^n \geq b^n$

p : "$a \geq b$ "

q : "$a^n \geq b^n$ ".

$F(0) : a \geq b \rightarrow 1=1$

Karena q benar, maka F(0) benar.

2.5 Pembuktian Berdasarkan Kasus

Untuk membuktikan bahwa implikasi $p \rightarrow q$, kita perlu membentuk p menjadi bentuk disjungsi, yaitu :

$p \equiv p_1 \vee p_2 \vee p_2 \vee . . . \vee p_n$

Selanjutnya :

$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee . . . \vee p_n \rightarrow q$

$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge (p_3 \rightarrow q) \wedge . . . \wedge (p_n \rightarrow q)$

Contoh 7.

Buktikan bahwa jika p bilangan ril, maka $|x||y| = |xy|$

Bukti:

p : bilangan ril

q: $|x||y| = |xy|$

$p \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge (p_3 \rightarrow q) \wedge (p_4 \rightarrow q)$

Kasus I:

p_1 : $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

q : $|x||y| = xy = |xy|$

$p_1 \rightarrow q$ benar

Kasus II:

p_2 : $x \geq 0 \wedge y < 0$

q : $|x||y| = x(-y) = |xy|$

$p_2 \rightarrow q$ benar

Kasus III:

p_3 : $x < 0 \wedge y \geq 0$

q : $|x||y| = (-x)y = |xy|$

$p_3 \rightarrow q$ benar

Kasus IV:

p_4 : $x < 0 \wedge y < 0$

q : $|x||y| = (-x)(-y) = |xy|$

$p_4 \rightarrow q$ benar

Sehingga $(p \rightarrow q)$ benar (terbukti)

2.6 Pembuktian Berdasarkan Equivalensi

Untuk membuktikan proposisi berbentuk bi-implikasi $p \leftrightarrow q$, kita perlu meninjau bentuk ekuivalensi $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Jika $(p \rightarrow q)$ dan $(q \rightarrow p)$ terbukti, maka $p \leftrightarrow q$ terbukti.

Contoh 8.

Buktikan bahwa $m^2 = n^2$ jika dan hanya jika $m = n$ atau $m = -n$

Bukti :

$m^2 = n^2 \leftrightarrow ((m = n) \vee (m = -n))$

$(m^2 = n^2 \rightarrow ((m = n) \vee (m = -n))) \wedge$

$(((m = n) \vee (m = -n)) \rightarrow m^2 = n^2)$

Tinjau kasus I

$(m^2 = n^2 \rightarrow ((m = n) \vee (m = -n)))$

$(m^2 - n^2 = 0) \rightarrow ((m = n) \vee (m = -n)))$

$(m + n)(m - n) = 0 \rightarrow ((m = n) \vee (m = -n)))$

Karena $(m + n)(m - n) = 0$,

maka $m + n = 0$ atau $m - n = 0$

Sehingga $m = -n$ atau $m = n$

Kasus IIa : $m = n$, $m^2 = (n)^2 = n^2$

Terbukti : $m = n \rightarrow m^2 = n^2$

Kasus II : $m = -n \rightarrow m^2 = (-n)^2 = n^2$

Terbukti : $m = -n \rightarrow m^2 = n^2$

Karena kasus I dan II terbukti, maka :

$m^2 = n^2 \leftrightarrow ((m = n) \vee (m = -n))$ terbukti.

Rangkuman

1. Ada banyak cara untuk membuktikan teorema dan kadang-kadang suatu teorema dapat dibuktikan dengan beberapa cara berbeda. Akan tetapi, secara umum ada 2 jenis metode pembuktian, yaitu metode pembuktian langsung dan metode pembuktian tidak langsung.

Latihan

Buktikan pernyataan-pernyataan berikut ini :

1. Untuk setiap bilangan bulat n, jika n^2 adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap.
2. Untuk setiap bilangan-bilangan bulat m dan n, jika m.n = 1 maka m = 1 dan n = 1.
3. Untuk setiap bilangan bulat a, jika (a-2) habis dibagi 3, maka (a^2-1) habis dibagi 3 juga.
4. Jika a dan b adalah bilangan-bilangan ganjil, maka a+b adalah bilangan genap.
5. Jika a mod 10 = 2 dan b mod 10 = 8, a+b habis dibagi.

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #9
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa mampu memahami konsep dasar himpunan dan dapat menyajikan himpunan serta dapat menyatakan relasi antar himpunan
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep dasar & notasi himpunan 1.2. Cara penyajian himpunan 1.3. Himpunan kosong & himpunan semesta 1.4. Kesamaan himpunan 1.5. Himpunan bagian
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's

		2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. **Himpunan**
   a. **Pengertian**

   Himpunan adalah kumpulan benda atau objek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Benda atau objek dalam **himpunan** disebut elemen atau anggota **himpunan**. Dari defi nisi tersebut, dapat diketahui objek yang termasuk anggota **himpunan** atau bukan.

   Himpunan dalam penulisannya dilambangkan dengn huruf besar, misalkan : A, B, C dan sebagainya. Kemudian untuk penulisan anggota pada himpunan, dilambangkan dengan huruf kecil, seperti : a, b, c dan seterusnya.

   b. **Cara Menentukan Himpunan**

   Cara untuk menentukan himpunan ada dua yaitu:

   i. **Menuliskan setiap anggota** pada himpunan tersebut dengan diawali dan diakhiri oleh kurung kurawal. Sebagi contoh yaitu misalkan A adalah himpunan komponen di dalam main unit PC, maka hasilnya adalah:
   A={mtherboard, hdd, memory, cpu, power supply, vga card}

   ii. **Menuliskan sifat yang melekat**, misalkan B adalah himpunan hewan di kebun binatang, maka dapat ditulis dengan :
   B={x|x=hewan-hewan di kebun binatang}.

c. **Contoh**

Nyatakan himpunan di bawah ini dengan notasi himpunan:

i. A = Himpunan bilangan bulat antara 1 dan 5
ii. B = Himpunan bilangan riil lebih dari 1

Jawaban A:

A = {1,2,3,4,5}

Penjelasan :

Pertama kita harus paham terhadap soal yang diberikan. Dari soal pada bagian I terlihat bahwa yang diminta adalah bilangan bulat, sehingga sehingga yang di tulis berbentuk bilangan bulat. Kemudian dari bilangan bulat tersebut dibatasi oleh anggka 1 sampai 5, sehingga pada penulisan notasi himpunannya, bisa ditulis angka 1 sampai 5 secara terurut.

Jawaban B:

B = $\{x \in \text{riil} | x > 1\}$

Penjelasan:

Dilihat dari soalnya, himpunan yang diminta adalah himpunan bilangan riil, dimana himpunan bilangan riil memiliki semua jenis bilangan, sehingga dalam penulisannya tidak bisa ditulis satu per satu angkanya. Kemudian dilihat dari soal batas bawah dari himpunan ini adalah 1 dan batas akhirnya tak terhingga, sehingga penulisan anggotanya hanya dapat dituliskan dengan sifat.

d. **Penentuan Anggota Dalam Himpunan**

Misalkan A adalah himpunan yang memiliki anggota a, maka ditulis sebagai : A={a}. dari pernyataan tersebut terlihat bahwa a adalah anggota dari A.

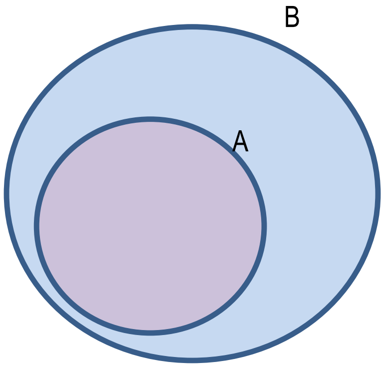
{a} dan a memiliki pengertian yang berbeda, dimana {a} dibaca himpunan yang beranggotakan a sedangkan a adalah anggota dari A. begitu juga dengan {{a}} dam {a} memiliki pengertian yang berbeda.

Pada penulisan simbolnya dapat dibuat $a \in A$, dimana a anggota dari A sedangkan untuk penulisan yang bukan anggota dapat ditulis dengan $b \notin A$.

e. **Himpunan Bagian**

A disebut sebagai himpunan bagian atau subset dari B jika dan hanya jika semua anggota A juga merupakan anggota dari B atau bisa ditulis sebagai $A \subseteq B$ atau bisa disingkat $((\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Berikut adalah gambar dari subset:



Berdasarkan gambar diatas, dapat terlihat bahwa himpunan A berada di dalam himpunan B, dengan ciri semua anggota himpunan A merupakan anggota dari himpunan B. Penulisannya juga dapat dibaca dari B dengan model baca : B memuat A dengan lambang $B \supseteq A$. Pada penulisannya jika suatu himpunan bukan merupakan himpunan bagian dari himpunan lainnya maka dapat dilambangkan dengan $\not\subset$ sehingga bila di masukkan ke dalam penulisan menjadi $D \not\subset B$.

2. Contoh :

Tentukan dan beri alasan mana diantara pernyataan berikut yang benar:

a. $2 \in \{1,2,3\}$
b. $\{2\} \in \{1,2,3\}$
c. $2 \subseteq \{1,2,3\}$
d. $\{2\} \subseteq \{1,2,3\}$

Berdasarkan contoh diatas a dan d adalah pernyataan yang benar, karena bila kita merujuk pada contoh pada penentuan anggota dalam himpunan di atas, 2 pada soal a merupakan anggota, dan pada soal d, terlihat bahwa {2} dibaca himpunan yang beranggotakan 2, sehingga benar bahwa pernyataan soal d bernilai benar.

Rangkuman

1. Himpunan merupakan suatu kumpulan objek yang memiliki sifat/keanggotaan yang sama dari setiap anggotanya
2. Dalam himpunan terdapat dua macam hirarkim yang pertama adalah kanggotaan himpunan dan yang kedua adalah himpunan bagian
3. Anggota himpunan merupakan objek yang menjadi bagian dari himpunan tersebut
4. Himpunan bagian adalah himpunan yang memiliki sekumpulan objek di dalamnya dan merupakan bagian dari himpunan lainnya.

Latihan.

1. Tuliskan elemen dari himpunan-himpunan berikut dengan semesta adalah N={1,2,3,…,15}
   a. A={x | x $\in$ N, 3 $<$ x $<$ 12}
   b. B={x | x $\in$ N, x bilangan genap. X $<$ 15 }
   c. C={ x | x $\in$ N, 4 + x = 3 }
2. Misalkan S = {n$\in$B|n=$(-1)^k$ untuk suatu bilangan bulat positif k} (dengan B=himpunan bilangan bulat). Nyatakan himpunan S dengan mendaftarkan anggotanya!

3. Misalkan A = {c,d,f,g}, B = {f,i} dan C = {d,g}. Tentukan apakah relasi berikut benar? Berikan alasannya!
   a. B $\subseteq$ A
   b. C $\subseteq$ C
   c. C $\subseteq$ A
3. Tentukan mana diantara pernyataan berikut yang benar! Berikan alasannya!
   a. 3 $\in$ {1,2,3}
   b. 1 $\subseteq$ {1}
   c. {3} $\in$ {{1}, {2}, {3}}
   d. $\emptyset$ = {$\emptyset$}
   e. $\emptyset$ $\in$ $\emptyset$

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #10
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami konsep aljabar himpunan
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Operasi himpunan irisan, gabungan, selisih complement 1.2. Diagram Venn Aljabar himpunan
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to

		comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. **Operasi Himpunan**

   a. **Pengertian**

   Operasi himpunan adalah suatu tahap penggabungan, pengirisan, pengeluaran dan penyelisihan dari satu atau lebih himpunan di dalam suatu diagram Venn.

   b. **Macam-macam Operasi Himpunan**

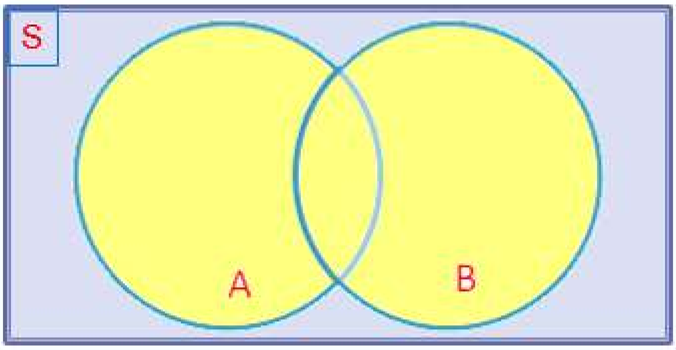
      i. **Union (Gabungan)**

      Union atau gabungan pada operasi himpunan merupakan proses penggabungan dua atau lebih himpunan dalan satu diagram Venn. Penggabungan ini meliputi seluruh himpunan yang ada di dalam diagram tersebut.

      Union dilambangkan dengan : $\cup$

      Dimana penulisannya yaitu : $A \cup B = \{x \in S| \ x \in A \vee x \in B \}$

      Hal ini dapat dilihat pada gambar berikut



      Berdasarkan gambar diatas dapat dilihat bahwa himpunan A dan B digabung sehingga anggota dari keduanya di masukkan ke dalam satu kesatuan.

      ii. **Intersection (Irisan)**

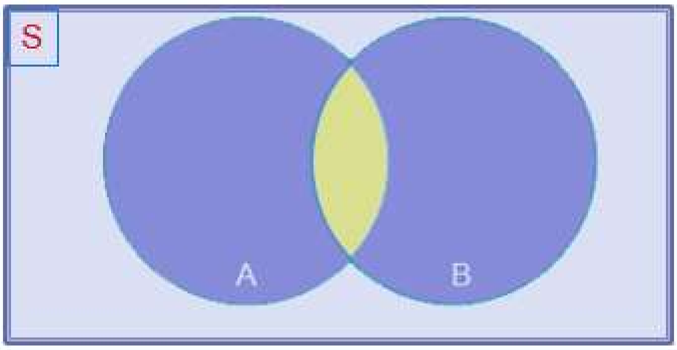
      Intersection atau dalam bahasa Indonesianya adalah irisan merupakan gabungan dari dua atau lebih himpunan yang memiliki anggota yang sama di setiap himpunannya.

      Lambang dari Irisan adalah : $\cap$

      Penulisan umum irisan adalah sebagai berikut : $A \cap B = \{x \in S|$

$x \in A \wedge x \in B$ }.

Dari tulisan tersebut dapat dilihat bahwa penghubung yang digunakan adalah konjungsi sehingga dapat dimuat bahwa dari kedua himpunan tersebut harus memiliki nilai yang sama sehingga akan menghasilkan kesimpulan yang benar. Berikut adalah gambar dari irisan himpunan:



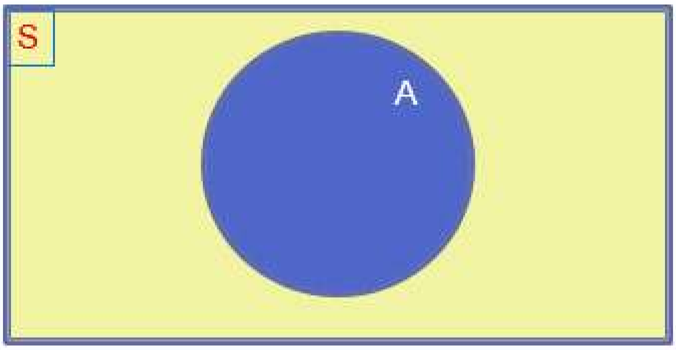
Berdasarkan gambar tersebut irisan terletak pada gambar warna kuning, sehingga dapat dilihat bahwa ada anggota yang dimiliki himpunan A tetapi juga anggota pada himpunan B, sehingga tergambar bahwa kedua himpunan tersebut memiliki irisan di tengahnya.

iii. **Complement (Lawan)**

Complement atau lawan adalah pengambilan anggota di luar dari himpunan yang ada sehingga semua anggota dari himpunan yang ada tidak diikutsertakan.

Lambang dari Complement adalah ^{c}

Dimana penulisannya bisa dimisalkan dengan $A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$. Berdasarkan pada pengertian simbol tersebut dapat ditulis bahwa A complement berarti anggota di luar himpunan A. Berikut adalah gambar dari complement:



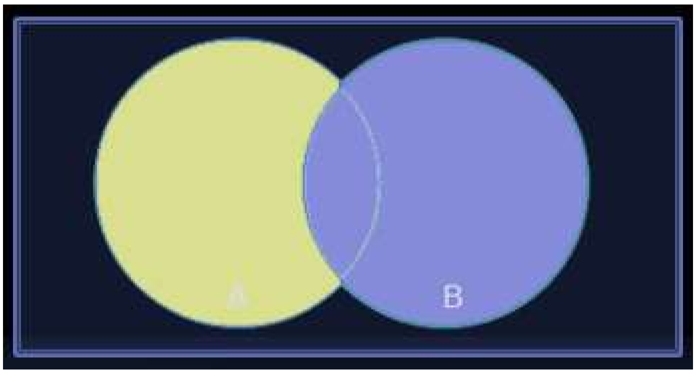
Berdasarkan gambar tersebut anggota yang terambil adalah anggota diluar himpunan A tetapi masuk di dalam anggota S.

iv. **Selisih**

Selisih merupakan pengambilan anggota dari suatu himpunan yang beririsan tetapi hanya berdasarkan nilai yang asli milik salah satu atau lebih himpunan yang ada dengan menyesuaikan ciri dari himpunan tersebut.

Lambang dari selisih adalah –

Sehingga dalam penulisannya bisa dicontohkan dengan A - B = $\{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, sehingga dapat diartikan bahwa anggota yang diambil adalah anggota yang khusus berasal dari himpunan A dan tidak termasuk irisan dari himpunan B. berikut adalah gambar dari penerapan A – B:



Pada gambar tersebut terlihat bahwa anggota yang terambil adalah semua anggota yang dimiliki himpunan A saja, tidak termasuk yang beririsan dengan himpunan B.

c. **Contoh**

Diketahui :

S = {a,b,c,d,e,f,g}

A = {a,c,e,g}

B = {d,e,f,g}

Ditanya :

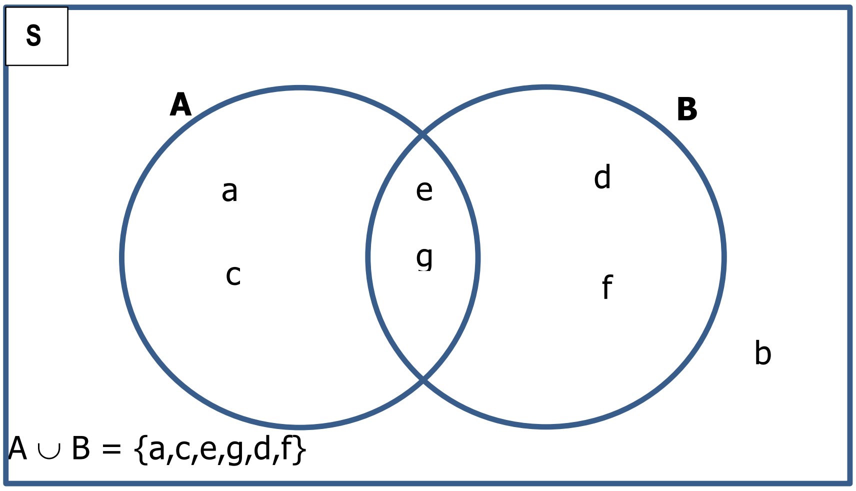
i. Gambarkan diagram Venn-nya!

ii. Tentukan nilai :

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. B-A
4. B^c

Jawaban :

a.



b. $A \cup B$ = {a,c,e,g,d,f}

c. $A \cap B$ = {e,g}

d. B – A = {d,f}

e. B^c = {b,d,f}

Rangkuman

1. Operasi himpunan terdiri dari gabungan, irisan lawan dan selisih.
2. Masing-masing operasi memiliki ciri yang berbeda-beda, pada gabungan seluruh anggota dari masing-masing himpunan yang ada di dalam semesta tergabung menjadi satu
3. Pada operasi irisan, yang diambil hanyalah anggota yang dimiliki oleh kedua himpunan atau lebih pada suatu diagram venn.
4. Operasi complement merupakan operasi dimana anggota yang diambila adalah diluar dari anggota pada suatu himpunan dalam diagram venn.
5. Terakhir operasi selisih adalah operasi yang menyatakan anggota khusus dari suatu himpunan yang terambil tidak termasuk irisan di dalamnya.
6. Penerapan hukum logika ternyata dapat diterapkan dalam pola himpunan hal ini terbukti dari dapat diterapkannya hukum asosiatif, distributif, komutatif, irisan dengan semesta, gabungan dengan semesta, komplemen ganda, idempoten dan hukum penyerapan.

Latihan.

1. Diketahui :

   S = {1,2,3,…,8,9}

   A = {1,2,3,4}

   B = {2,4,6,8}

   C = {3,4,5,6}

Ditanya :

   a. Gambarkan diagram Venn dari semesta tersebut!
   b. Tentukan hasil dari :
      I. $(A \cup B) \cup C$ dan $A \cup (B \cup C)$
      II. $A \cap (B \cup C)$ dan $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Misalkan A, B dan C adalah himpunan, buktikan bahwa:
   a. $A - B = A$
   b. $A - (A \cap B) = A - B$
   c. $A \cap A^c = \varnothing$
   d. $(S \cap A) \cup (B \cap A) = A$

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

JAKARTA

SEPTEMBER 2019

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom

Riri Irawati, M.Kom

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #11
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah operasi himpunan dengan prinsip aljabar himpunan
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep dualitas himpunan
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series.

		4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. **Hukum Logika dalam Himpunan (Aljabar Himpunan)**

Pengertian:

Aljabar merupakan cabang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmatika. Aljabar berasal dari bahasa Arab "*al-jabr*" yang berarti *"pertemuan"*, *"hubungan"* atau bisa juga *"penyelesaian"*.Aljabar himpunan adalah hukum-hukum yang berlaku pada himpunan untuk penyelesaian suatu masalah dalam himpunan.

Komutatif

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Asosiatif

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributif

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Komplemen Ganda

- $(A^c)^c = A$

De Morgan

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Irisan dengan S (semesta)

- $A \cap S = A$

Gabungan dengan S (semesta)

- $A \cup S = S$

Penyerapan

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

2. **Prinsip Dualitas**

Pengertian:

Prinsip dualitas mengemukakan bahwa dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh :

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian kanan jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur kiri untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok kanan boleh langsung

(b) di Indonesia,

- mobil harus berjalan di bagian kiri jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur kanan untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok kiri boleh langsung.

Prinsip dualitas pada kasus diatas adalah:

'Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Indonesia.'

Prinsip Dualitas pada himpunan.

Jika kita menukar $\cup$ dengan $\cap$ dan S dengan $\varnothing$ dalam setiap pernyataan tentang himpunan, maka pernyataan baru tersebut DUAL dari pernyataan aslinya. Dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Tabel 1.1 Dualitas dari Hukum Aljabar Himpunan

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen : $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten : $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan : $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Contoh :

1. A ∪ (B – A) = A ∪ B

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

2. A ∩ (A′ ∪ B) = A ∩ B

$$\begin{aligned} A \cap (\overline{A} \cup B) &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

Rangkuman

1. Prinsop dualitas dalam himpunan menggambarkan suatu ekuivalensi dari dua model rangkaian himpunan.
2. Langkah pembuktian dualitas himpunan adalah dengan menggunakan aljabar himpunan.
3. Aljabar himpunan berkaitan dengan hukum logika

Latihan.

Buktikan apakah pernyataan berikut bernilai benar?

1. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
2. $(P \cup Q) \cap (P' \cap R)' = P \cup (Q' \cup R)'$

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #12
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami dan mengaplikasikan prinsip hitung untuk menyelesaikan masalah himpunan
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Fundamental Produk 1.2. Himpunan Berhingga 1.3. Inclusion dan Exclusion
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical

		Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. **Fundamental Produk**

   a. **Pengertian**

   Fundamental Produk pada himpunan adalah dimana setiap irisan pada sejumlah himpunan dalam satu diagam venn dibuat saling asing dan masing-masing bagian yang saling asing tersebut nantinya akan diisikan suatu angka.

   b. **Rumus**

   Formulasi untuk mendapatkan jumlah dari produk yang tercipta dari kumpulan himpunan dalam suatu diagram venn adalah :

$$2^n$$

   Dimana n adalah jumlah dari himpunan yang ada di dalam diagram.

   c. **Contoh :**

   Tentukan jumlah fundamental produk yang tercipta dari dua himpunan yang ada di dalam satu diagram venn!

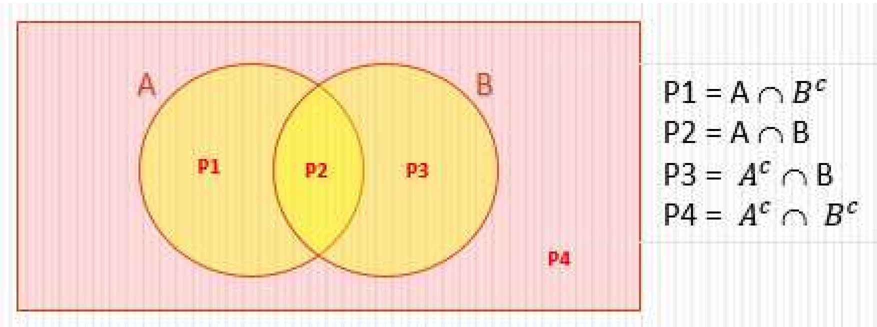
   Misal : himpunan yang ada yaitu A dan B

   Jawab :

   Karena jumlah himpunan yang ada dalam satu diagram sebanyak tiga, maka dalam penerapan rumusnya menjadi :

$$2^2 = 4$$

   Dengan demikian maka jumlah fundamental produk yang terbentuk sebanyak 8 produk. Hal ini dapat dilihat pada gambar berikut :



Berdasarkan pada gambar tersebut terlihat bahwa dua himpunan yang saling beririsan masing-masing terbagi oleh pemisah dari irisan yang terbentuk dan masing-masing bagian memiliki ciri khas masing-masing, seperti pada P1 memiliki ciri khas bahwa yang ada pada bagian tersebut hanya merupakan bagian dari himpuan A saja, kemudian P2 memiliki ciri khas dari irisan antara himpunan A dan B, selanjutnya pada P3 terlihat bahwa dimiliki oleh himpunan B saja dan terakhir P4 merupakan tempat untuk produk yang berada di luar himpunan A dan B, tetapi masih di dalam lingkup semesta (diagram venn).

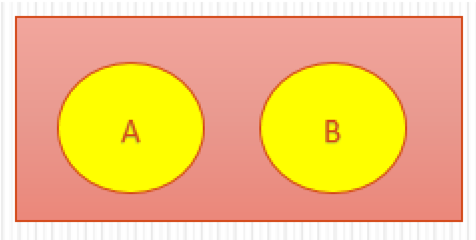
2. **Himpunan Berhingga**
   a. **Pengertian**
   Jika terdapat sejumlah elemen berbeda, dimana elemen tersebut menyatakan suatu bilangan bulat non negatif, maka jumlah nilai dari elemen tersebut menyatakan jumlah dari elemen dalam suatu himpunan yang memuat elemen-elemen tersebut.
   b. Lambang : n(A) untuk nilai himpunan berhingga pada himpunan A
   c. **Contoh :**
   Tentukan manakah himpunan berikut yang berhingga:
      1) A = {musin dalam satu tahun di negara sub tropis}
      2) B = {bilangan bulat negatif}

   Jawab :
   1) n(A) = 4
      Pembahasan :
      Seperti yang kita ketahui bersama bahwa musim di lingkungan negara yang berada pada daerah sub tropis yaitu musim semi, panas, gugur dan dingin. Sehingga jika dijumlahkan sebanyak empat, maka jumlah elemen di himpunan A ada 4.

   2) n(B) = tak berhingga
      Pembahasan :

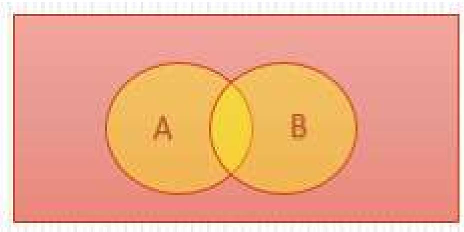
Sebagaimana yang kita ketahui, jumlah bilangan bulat negatif adalah tak terhingga, maka untuk jawaban himpunan B tidak ada.

3. **Inclusion dan Exclusion**
   a. Penjelasan
      1. Misalkan terdapat dua himpunan yang saling asing (A dan B)
         Maka $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



Nilai himpunan A ditambah himpunan B adalah x+y dimana n(A)=x dan n(B)=y, karena kedua himpunan tersebut terpisah maka penjumlahannya dengan model penjumlahan umum. Hal ini bisa dilihat dari permisalan ada dua kelompok kelas XA dan XB, masing-masing kelas tersebut memiliki mahasiswa yang berbeda, sehingga tidak terjadi irisan di kedua kelas tersebut. Maka untuk menjumlahkan (jumlah mahasiswa) dari kedua kelas tersebut tinggal menjumlahkannya seperti bentuk umum, yaitu jumlah mahasiswa di kelas XA ditambah jumlah mahasiswa di kelas XB.

2. Misalkan terdapat dua himpunan yang tidak saling asing (A dan B)
   Maka $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B)$



b. Contoh :

Misalhkan dalam satu himpunan terdapat dua kelompok yang masing-masing kelompok tersebut memiliki anggota yang saling bersinggungan atau beririsan (dalam dua kelompok tersebut ada anggota yang sama). Maka untuk menghitung nilai gabungan kedua himpunan tersebut tidak bisa dengan cara menjumlahkan keduanya seperti pada contoh sebelumnya. Cara menggabungkannya adalah sebagai berikut :

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Mengapa demikian? Dari gambar diatas dapat terlihat bahwa kedua himpunan A dan B memiliki anggota yang sama dalam irisannya. Untuk menyelesaikannya kita gunakan prinsip fundamental produk, dimana masing-masing bagian diberikan tanda yang berbeda.

Berdasarkan pada pembagian produknya, maka gambar diatas dibagi ke dalam tiga bagian yaitu:

$$n(A \cap B^c) = X$$

$$n(A \cap B) = Y$$

$n(A^c \cap B) = Z$

Maka kalau ditelaah n(A) = X+Y dan n(B) = Y+Z sehingga kalau di jumlahkan secara langsung, maka X+Y+Y+Z, sehingga menjadi X+2Y+Z, oleh sebab itu maka diperlukan pengurangan terhadap nilai 2Y, agar nilai menjadi normal kembali, jadi X+2Y+Z-Y = X+Y+Z.

c. Kasus :

Pada suatu hari diadakan survey ke suatu kantor. Pada kantor tersebut didapat jumlah karyawan yang bekerja sebanya 32 orang. Setelah didata ternyata terdapat 30 orang karyawan yang mempunyai laptop dan 14 orang yang mempunyai PC.

Tentukan :

a. Banyaknya karyawan yang hanya mempunyai laptop dan PC
b. Banyaknya karyawan yang memiliki PC
c. Banyaknya karyawan yang mempunyai laptop
d. Gambarkan diagram venn-nya!

Jawab :

a. Untuk menjawab pertanyaan ini, terlebih dahulu kita harus sudah faham soal yang diberikan. Berdasarkan soal yang diberikan tersebut, yang diketahui adalah :

   n(Laptop $\cup$ PC) = 32 orang

   n(Laptop) = 30 orang

   n(PC) = 14 orang

   dari hal yang diketahui tersebut, maka kalau di terapkan dalam rumus akan terisi sebagai berikut:

   n(Laptop $\cup$ PC) = n(Laptop) + n(PC) – n(Laptop $\cap$ PC)

   32 = 30 + 14 - n(Laptop $\cap$ PC)

   Dari persamaan tersebut terlihat bahwa yang ditanyakan langsung bisa terawab, yaitu Banyaknya karyawan yang hanya mempunyai laptop dan PC. Oleh karena itu dapat ditentukan :

   n(Laptop $\cap$ PC) = n(Laptop) + n(PC) - n(Laptop $\cup$ PC)

   n(Laptop $\cap$ PC) = 30 + 14 – 32

   n(Laptop $\cap$ PC) = 12 orang

   maka kalau dalam diagram Venn 12 masuk di dalam penulisan irisan antara himpunan Laptop dan PC.

b. Untuk mendapatkan nilai atau jumlah orang yang mempunyai laptop saja maka tinggal mengurangi nilai keseluruhan karyawan yang mempunyai laptop dengan nilai irisannya, yaitu:

   n(Laptop $\cap$ PC^c) = n(Laptop) - n(Laptop $\cap$ PC)

   n(Laptop $\cap$ PC^c) = 30 – 12 = 18 orang.

c. Untuk mendapatkan nilai atau jumlah orang yang mempunyai PC saja, maka langkah yang ditempuh adalah dengan mengurangi nilai dari n(PC) dengan n(Laptop $\cap$ PC), sehingga dapat menjadi :

n($Laptop^c \cap$ PC) = n(PC) - n(Laptop $\cap$ PC)

n($Laptop^c \cap$ PC) = 14 -12 = 2 orang

Untuk memeriksa apakah secara keseluruhan bernilai benar, maka dapat di periksa dengan memasukkan semua anggka yang sudah di dapat ke dalam rumus yang ada :

n(Laptop $\cup$ PC) = n(Laptop) + n(PC) – n(Laptop $\cap$ PC)

32 = 30 + 14 – 12

32 = 32

Maka terbukti benar, seluruh nilai yang didapat.

Rangkuman

1. Fundamental Produk terbentuk berdasarkan jumlah dari himpunan yang terbentuk.
2. Rumus untuk mendapatkan fundamental produk adalah 2^n
3. Himpunan berhingga adalah himpunan yang dapat dihitung seluruh anggotanya menggunakan perhitungan positif
4. Dalam himpunan berhingga terdapat inclusion dan exclusion

Soal :

- Sejumlah mhs dalam sebuah asrama ditanya apakah mereka mempunyai kamus D atau ensiklopedia T di dalam kamar mereka. Hasilnya menunjukkan bahwa 650 mhs mempunyai kamus, 150 tidak mempunyai kamus, 175 mempunyai ensiklopedia dan 50 tidak mempunyai kamus maupun ensiklopedia. Tentukan jumlah mhs yang:
  - Tinggal di asrama tersebut
  - Mempunyai keduanya (kamus dan ensiklopedia)
  - Hanya memepunyai ensiklopedia

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #13
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami konsep dasar relasi antar himpunan dan dapat menentukan daerah asal dan daerah hasil
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Pasangan terurut, hasil kali himpunan 1.2. Jenis jenis relasi
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical

		Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum’s outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. **Cartesian Product**
   a. **Pengertian**

   adalah operasi matematika yang mengembalikan himpunan (atau himpunan produk atau produk sederhana) dari beberapa himpunan. Yaitu, untuk himpunan A dan B, produk Cartesian $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan berurutan (a , b) di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Produk dapat ditentukan menggunakan notasi set-builder.

   b. **Rumus**

   A X B, dimana setiap anggota himpunan A dikawankan dengan setiap anggota himpunan B, disebut juga dengan nama relasi semesta.
   Nilai A X B berbeda dengan nilai B X A.

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 x\, A_2 x \ldots x A_n$$

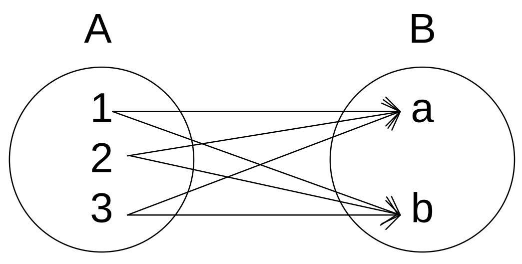
   Rumus tersebut bila dikaitkan dengan database, maka berkaitan dengan projection sebagai wujud dari join dalam database.

   c. **Contoh :**

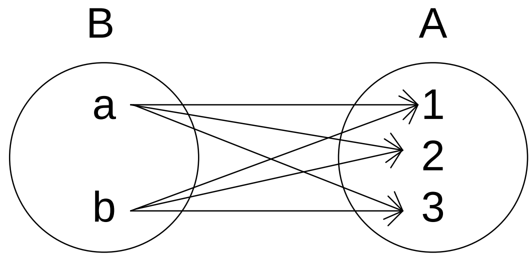
   Misalkan A = {1,2,3} dan B={a,b}, tentukan nilai AXB dan BXA

   Jawab :

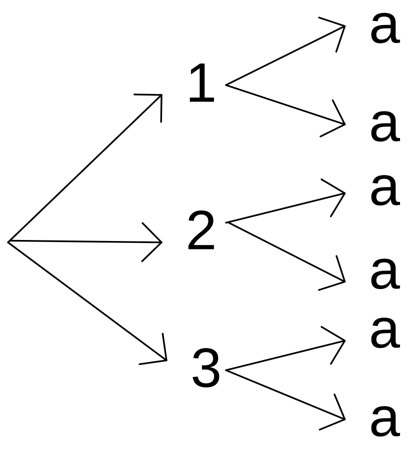
   AXB = {(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)}



   BXA = {(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)}



Apabila digambarkan dengan diagram pohon akan menjadi :



2. **Relasi**

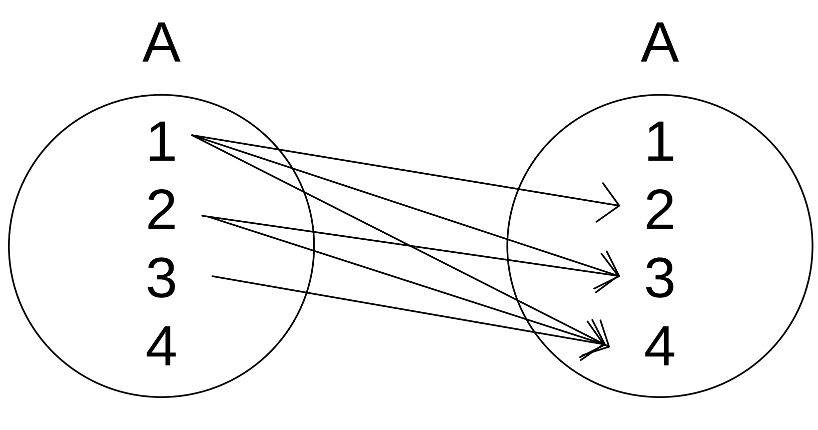
   a. **Pengertian**

   Sebuah relasi biner dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah suatu subset R dari AXB, diberikan a$\in$A dan b$\in$B, dituliskan dengan a R b, berarti (a,b) $\in$ R.

   b. **Contoh :**

   Misalkan R adalah relasi pada A = {1,2,3,4} didefinisikan oleh x lebih kecil dari y, maka R adalah relasi "<". Tuliskan R sebagai sebuah himpunan pasangan terurut!

   Jawab :



R terdiri dari (a,b) dimana a<b, maka:

R = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)}

3. **Komposisi Relasi**

   a. **Penjelasan**

   Misalkan A, B dan C adalah himpunan dan R adalah relasi dari A ke B dan misalkan misalkan S adalah relasi dari B ke C, maka R subset dari AXB dan S adalah subset dari BXC, maka R dan S akan memberikan suatu relasi dari A ke C yang dinyatakan dengan R∘S, dengan begitu R∘S = {(a,c): ada b∈B dimana (a,b)∈R dan (b,c)∈S}.

   b. **Contoh :**

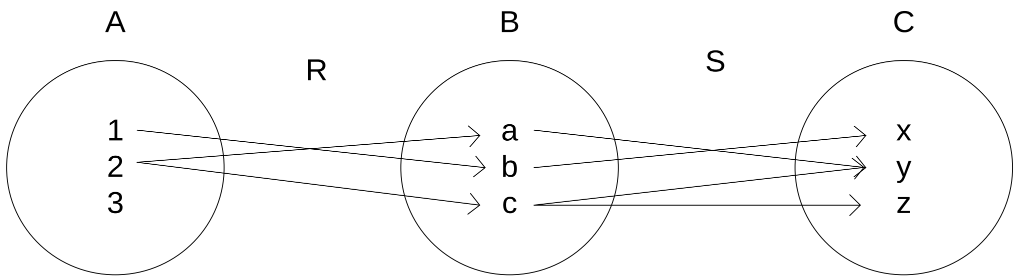
   Misalkan A = {1,2,3,4}, B = {a,b,c} dan C = {x,y,z}

   R = {(1,b),(2,a),(2,c)} dan S = {(a,y),(b,x),(c,y),(c,z)}

   Tentukan R∘S!

   Jawab:

   Pertama-tama kita perlu menggambarkan relasi antar ketiga himpunan tersebut. gambarnya adalah sebagai berikut:



   Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa ada keterkaitan antara himpunan A dan C melalui himpunan B. Untuk menentukan R∘S kita berpatokan pada himpunan A dan B yang terhubung langsung melalui elemen himpunan B, sehingga hasil dari R∘S = {(1,x),(2,y),(2,z)}.

CUPLIKAN

Dalam dunia komputer, komposisi relasi salah satunya dimanfaatkan dalam pembuatan laporan dari suatu sistem yang memanfaatkan sebuah tabel sebagai jembatan untuk mengambil isi dari tabel yang dituju.

Rangkuman

1. Dalam himpunan ada hirarki dalam subset suatu relasi.
2. Yang terbesar dalam sebuah relasi adalah cartesian produk (projection)
3. Subset dari CP adalah relasi, dimana relasi merupakan $\prod$ yang tidak lengkap.
4. Dalam relasi terdapat komposisi relasi yang merupakan pola hubungan antar himpunan dengan melalui perantara yang berupa himpunan juga.

Soal :

1. Misalkan A={1,2,3,4,6}. R adalah relasi pada A yang didefinisikan dengan "x membagi y". Dimana (x,y) adalah bilangan bulat dan sebagai hasilnya juga bilangan bulat. Tentukan R!
2. Misalkan A = {1,2,3,4}, B = {a,b,c,d} dan C = {x,y.z}

R adalah relasi dari A ke B dan S adalah relasi dari B ke C dengan ketentuan

R = {(1,a),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d),(4,c)}

S = {(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)}

Tentukan R◦S!

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #14
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami konsep dasar fungsi serta dapat melakukan operasi fungsi
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Definisi fungsi 1.2. Pemetaan 1.3. Nilai fungsi 1.4. Komposisi Fungsi
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical

		Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

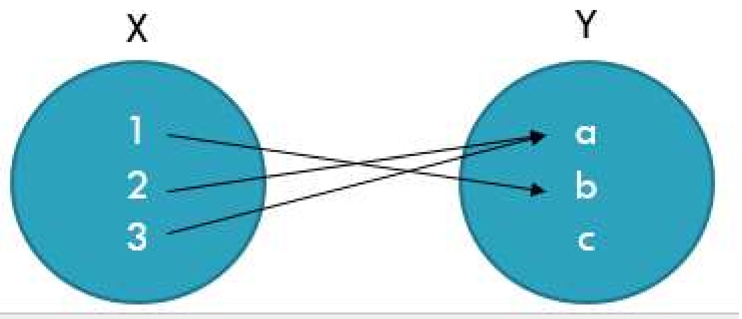
1. **Fungsi**
   a. **Pengertian**

   Kejadian khusus pada relasi.

   Suatu relasi dari x ke y dengan syarat bahwa setiap $x \in X$ mempunyai kawan yang tunggal di Y. X disebut domain dan Y disebut kodomain.

   b. **Simbol :** f: X⟶Y

   c. **Contoh :**

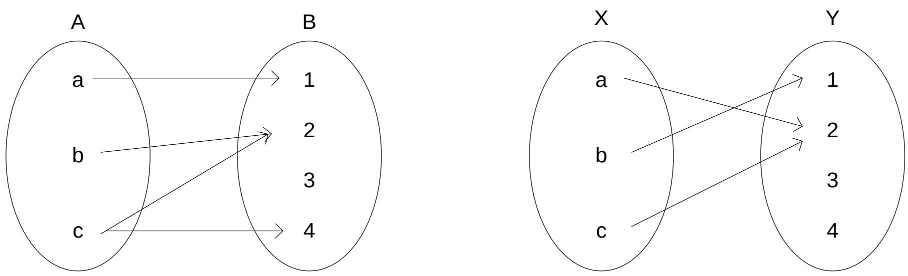


Penjelasan :

Pada setiap model fungsi, ciri-ciri dapat dilihat pada bagian domain (himpunan X), setiap anggota pada himpunan X hanya memiliki satu kawan di daerah kodomain (himpunan Y). hal itu menunjukkan ciri dari suatu fungsi.

Contoh 1:

Sebutkan jenis dan berikan alasan terhadap nama relasi-relasi berikut ini:

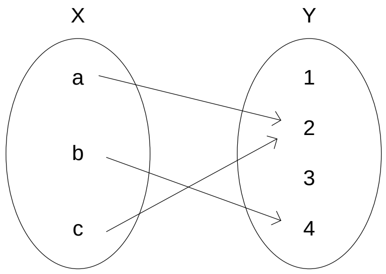


Jawab :

Berdasarkan dari pengertian relasi dan fungsi dapat dikatakan bahwa pada relasi A ke B merupakan relasi karena kalau dilihat dari ciri-cirinya, $c \in A$ memiliki dua kawan di daerah B. kemudian untuk relasi dari X ke Y merupakan fungsi, karena bila dilihat dari ciri-cirinya, setiap anggota pada humpunan X memiliki satu kawan di darah Y.

Contoh 2:

Misalkan X = {a,b,c} dan Y = {1,2,3,4} didefinisikan oleh fungsi f : X → Y dengan diagram panah berikut :



Tentukan domain, kodomain dan daerah hasil fungsi f, serta carilah f(a), f(b) dan f(c)!

Jawab :

Domain = {a, b, c}

Kodomain = {1, 2, 3, 4}

Daerah hasil = {2, 4}

f(a) = 2, f(b) = 4 dan f(c) = 2

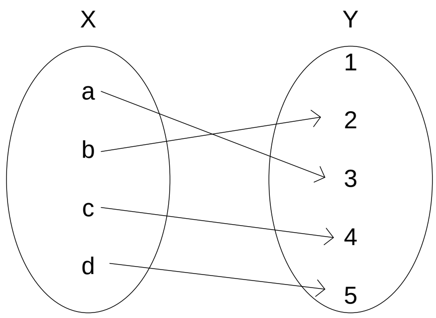
2. **Fungsi Injektif**

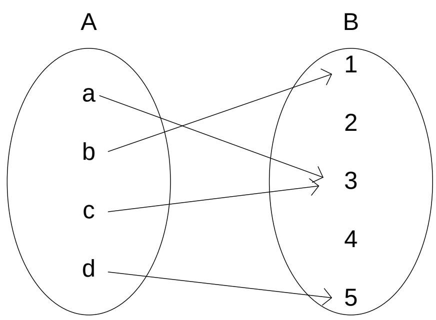
   a. **Pengertian**

   Bila dan hanya bila setiap anggota Y paling banyak hanya memiliki satu kawan di anggota X, jadi Y boleh tidak memiliki kawan.

   b. **Contoh :**

   Tentukan jenis dan alasan terhadap hubungan relasi berikut:





Jawab :

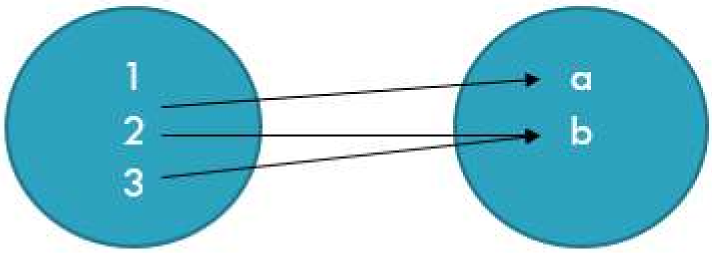
Berdasarkan gambar diatas terlihat bahwa hubungan dari X ke Y merupakan fungsi injektif dimana dapat dilihat dari ciri yang dimiliiki. Untuk mengetahuinya pertama-tama kita lihat dari himpunan X yang mempunyai kawan ke daerah Y apakah masing-masing anggota pada himpunan X memiliki satu kawan atau lebih di daerah Y, kalau lebih atau ada anggota X yang tidak memiliki kawan berarti itu merupakan relasi, tetapi jika hanya memiliki satu kawan maka fungsi. Selanjutnya dilihat dari sisi kodomain, apakah pada sisi kodomain setiap anggotanya memiliki kawan yang tunggal dari daerah domain dan ada anggota kodomain yang tidak memiliki kawan? Jika ya maka fungsi tersebut merupakan fungsi injektif. Sedangkan hubungan A ke B adalah fungsi karena bila dilihat dari sisi kodomain ada anggota kodomain yang memiliki kawan lebih dari satu.

3. **Fungsi Surjektif**

   a. **Penjelasan**

   Fungsi surjektif adalah suatu fungsi yang Bila dan hanya bila setiap anggota Y mempunyai satu kawan di X, dan kawan anggota Y boleh lebih dari satu.

   b. **Contoh :**



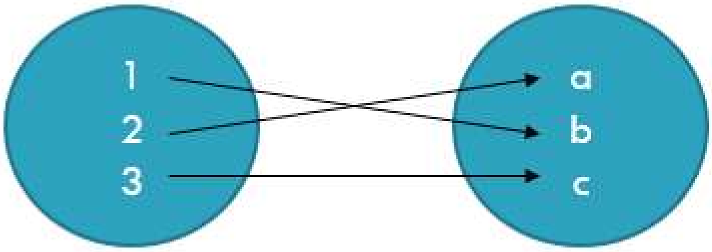
   Berdasarkan pada gambar di atas, terlihat bahwa relasi di atas termasuk ke dalam fungsi hal ini dapat dilihat dari domain yang anggotanya hanya memiliki satu kawan di daerah kodomain. Selanjutnya dilihat dari kodomain fungsi tersebut memenuhi syarat dari fungsi surjektif, yaitu setiap anggota pada kodomain memiliki kawan dari daerah domain, dan tidak ada satupun anggota kodomain yang tidak memiliki kawan, serta kawan dari kodomain boleh memiliki kawan lebih dari satu.

4. **Fungsi Bijektif**

a. **Pengertian**

Fungsi bijektif adalah fungsi yang memenuhi syarat injektif dan surjektif.

b. **Contoh :**



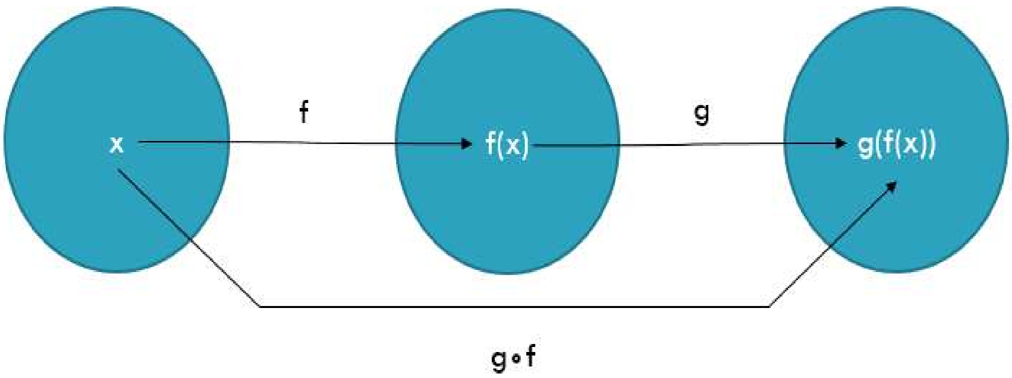
Fungsi bijektif adalah fungsi yang memenuhi syarat injektif dan surjektif, yaitu memenuhi syarat bahwa masing-masing anggota di daerah kodomain memiliki satu pasangan dari daerah domain, atau dalam hubungan kardinaliti di dalam database memenuhi syarat one to one.

5. **Komposisi Fungsi**

a. **Pengertian**

Hubungan penggabungan operasi pada dua jenis fungsi f (x) dan g (x) hingga menghasilkan fungsi baru.

b. **Contoh :**



Pada gambar di atas, dapat terlihat bahwa terdapat dua fungsi yang menghubungkan tiga himpunan, maka dari hubungan tersebut dapat dilihat g komposisi f.

Rangkuman

1. Fungsi merupakan subset dari suatu relasi.
2. Fungsi bercirikan pada domain hanya memiliki sati relasi ke kodomain.
3. Selain fungsi secara umum, terdapat juga subset dari fungsi, yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.
4. Fungsi bijektif merupakan irisan antara fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Soal :

1. Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi pada himpunan bilangan bulat Z yang didefinisikan dengan rumus f(n)=n+1 dan g(n)=n^2, dimana semua n adalah anggota dari Z.
   a. Tentukan nilai g f
   b. Tentukan f g

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id

MODUL MATA KULIAH

LOGIKA MATEMATIKA

MI041 - 3SKS

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
UNIVERSITAS BUDI LUHUR

TIM PENYUSUN

Rizky Pradana, M.Kom
Riri Irawati, M.Kom

JAKARTA
SEPTEMBER 2019

UNIVERSITAS BUDI LUHUR
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

MODUL PERKULIAHAN #15
JUDUL POKOK BAHASAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami konsep dasar aljabar boole sampai dengan gambaran rangkaian logika.
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Konsep Aljabar Boole 1.2. Disjungtif Normal Form 1.3. Rangkaian Logika
Daftar Pustaka	:	1. Ayres. (1965). Modern Algebra. Schaum's 2. Gallier, Jean H, (1986.) Logic for Computer Science. Harper & Row Publisher. New York 3. JP Tremblay & R.Manohar. (1975). Discrete Mathematical

		Structure with Application to comp.science. Mc Graw Hill Cs.Series. 4. Lipschutz. (2007). Discrete Mathematics. Schaum's outline series. 5. Siang, Jong Taek. (2002). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada ilmu Komputer.

1. **Aljabar Boole**

   a. **Pengertian**

   Didefinisikan sebagai suatu himpunan (B, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, 0, 1)

   Simbol : $\vee$ = +

   $\wedge$ = * atau tidak ditulis sama sekali

   b. **Sifat :**

   i. Komutatif

   $X \vee Y = Y \vee X$
   $X \wedge Y = Y \wedge X$

   ii. Asosiatif

   $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$

   $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$

   iii. Distributif

   $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

   iv. Identitas

   $X \vee 0 = X$

   $X \wedge 1 = X$

   v. Negasi

   $X \vee X' = 1$

   $X \wedge X' = 0$

   vi. Idempoten

   $X \vee X = X$

   $X \wedge X = X$

   vii. Ikatan

   $X \vee 1 = 1$

   $X \wedge 0 = 0$

   viii. Absorpsi

   $(X \vee Y) \wedge X = X$

   $(X \wedge Y) \vee X = X$

   ix. Demorgan

(X ∨ Y)′ = X′ ∧ Y′

(X ∧ Y)′ = X′ ∨ Y′

c. **Contoh :**

Penghubung OR dalam fungsi $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$

p	q	pvq
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Penjelasan :

Pada gambar terlihat tabel yang ditanyakan adalah OR (disjungsi), dari soal terlihat $\{0,1\}^2$ yang artinya terdapat dua variabel pada tabel yang di buat. Dalam hal ini variabel-variabel tersebut di tulis dengan inisial p dan q. selanjutnya sama dengan model pembuatan tabel kebenaran, hanya saja true pada logika digantikan dengan angka satu, kemudian false pada logika diganti dengan angka nol.

2. **Ekspresi Boole dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$**

   a. **Pengertian**

1 dan 0 adalah ekspresi boole

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ masing-masing adalah ekspresi boole

Jika $E_1\ dan\ E_2$ adalah ekspresi boole, maka $E_1 \wedge E_2, E_1 \vee E_2$ adalah ekspresi boole juga

3. **Disjungtif Normal Form (DNF)**

   a. **Penjelasan**

DNF terdiri dari penjumlahan dari beberapa perkalian (sum of products = SOP). Dalam tabel kebenaran, DNF merupakan perkalian-perkalian yang menghasilkan nilai 1. Contoh: $xy + x'y$ Setiap suku (term) disebut minterm

b. **Contoh :**

Jadikan ekspresi $E = (x \vee yz')(yz)'$ dalam bentuk DNF!

$(x \vee yz')(yz)' = (x \vee yz')\ (y' \vee z')$

$= x(y' \vee z') \vee (yz')\ (y' \vee z')$

$= (xy' \vee xz') \vee (yz'y' \vee yz')$

$= xy' \vee xz' \vee yz'$

Jawab :

$xy' = xy'.1 = xy'\ (z \vee z') = xy'z \vee xy'z'$

$xz' = x.1.z' = x(y \vee y')z' = xyz' \vee xy'z'$

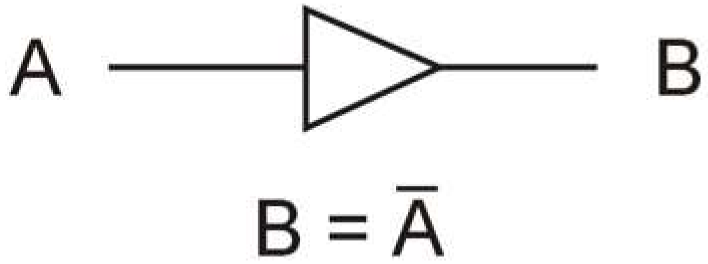
$yz' = 1.\ yz' = (\ x \vee x')\ yz' = xyz' \vee x'yz'$

Maka $E = xy'z \vee xy'z' \vee xyz' \vee x'yz'$

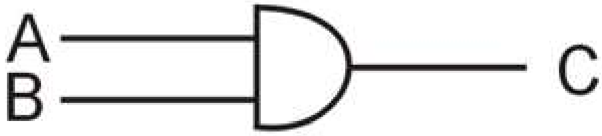
4. **Gerbang Logika**

a. **Pengertian**

NOT

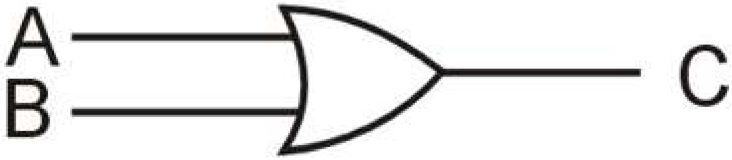


AND



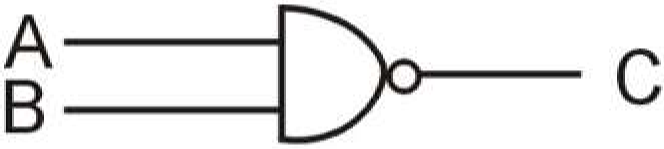
$$C = A.B$$

OR



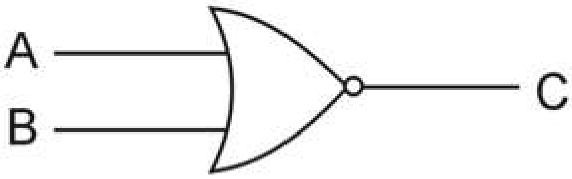
$$C = A+B$$

NAND (Not AND)



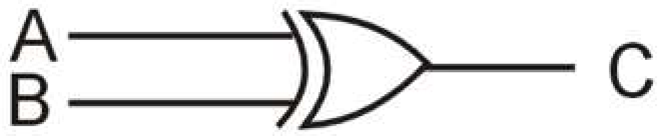
$$C = \overline{A\ .\ B}$$

NOR (Not OR)



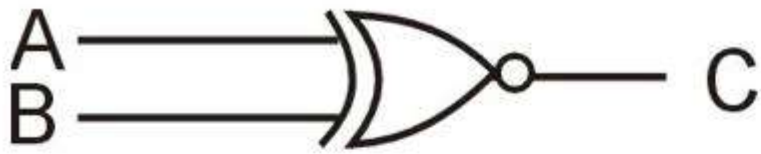
$$C = \overline{A + B}$$

XOR (Eksklusif OR)



$$C = A \oplus B$$

XNOR (Not XOR)

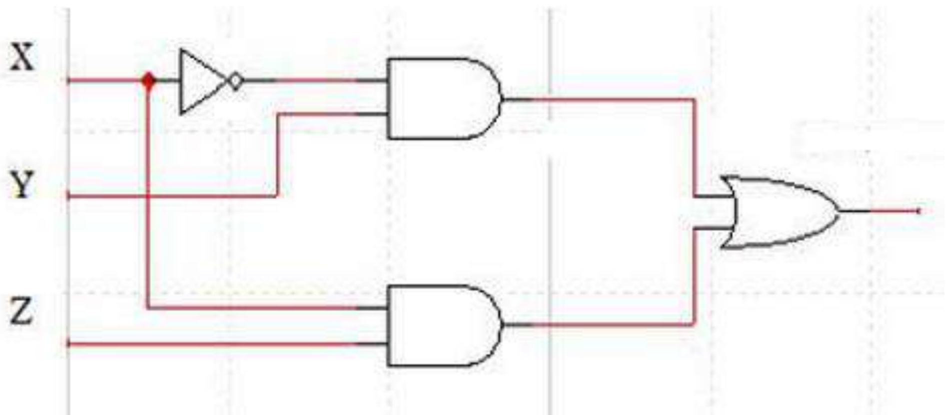


$$C = \overline{A \oplus B}$$

b. **Contoh :**

Gambarkan gerbang logikanya : F = X'Y + XZ

Jawab :



Rangkuman

1. Alabar Boole merupakan suatu teknik matematika yang dipakai untuk menyelesaikan masalah-masalah logika atau menyederhanakan persamaan logika.
2. Aljabar Boole adalah suatu bentuk aljabar dimana variabel-variabel dan fungsi-fungsinya memiliki nilai 0 dan 1.
3. Aljabar *boole* mendasari operasi-operasi aritmatika yang dilakukan oleh komputer dan juga bermanfaat untuk menganalisis dan mendesain rangkaian yang menjadi dasar bagi pembentukkan komputer sendiri.
4. Gerbang logika adalah piranti dua-keadaan, yaitu mempunyai keluaran dua keadaan.
5. Keluaran dengan nol volt yang menyatakan logika 0 (atau rendah).
6. keluaran dengan tegangan tetap yang menyatakan logika 1 (atau tinggi).
7. Gerbang logika dapat mempunyai beberapa masukan yang masing-masing mempunyai salah satu dari dua keadaan logika, yaitu 0 atau 1.

Soal :

1. Buatlah penghubung XOR dalam fungsi $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ dalam bentuk table !
2. Perhatikan fungsi boole f = $\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan oleh aturan f (x_1, x_2, x_3) = $(x_1 + x_2 + x_3)$ mod 2. Nyatakan f dengan menggunakan tabel masukan / keluaran!
3. Gambarkan rangkaian logika dari ((x ∨ y')' ∨ (x ∨ z))' ∨ y!

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS BUDI LUHUR

Jl. Raya Ciledug, Petukangan Utara, Pesanggrahan

Jakarta Selatan, 12260

Telp: 021-5853753 Fax : 021-5853752

http://fti.budiluhur.ac.id